MPI-PhE / 96-16
September 1996

Messung des transversalen Energieflusses mit dem H1-Detektor bei HERA

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Universität Hamburg

vorgelegt von

Marc Fabian Hess

aus Göttingen

Hamburg
1996

Gutachter der Dissertation:	Prof. Dr. F.-W. Büßer Prof. Dr. B. Naroska
Gutachter der Disputation:	Prof. Dr. F.-W. Büßer Prof. Dr. G. Buschhorn
Leiter der Disputation:	Dr. G. Poelz
Datum der Disputation:	2. September 1996
Sprecher des Fachbereichs Physik und Vorsitzender des Promotionsausschusses:	Prof. Dr. B. Kramer

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Messung der Transversalenergie E_T als Funktion der Pseudorapidität im Laborsystem und im hadronischen Schwerpunktsystem für den kinematischen Bereich $10^{-5} < x < 10^{-2}$ und $2,5 < Q^2 < 100$ GeV^2 vorgestellt. Die Messung beruht, unter Verwendung von Daten mit nominellem und in Protonrichtung verschobenem Wechselwirkungspunkt, auf Ereignissen der tiefunelastischen Elektron-Proton-Streuung, die in den Jahren 1993 und 1994 mit dem H1-Detektor am Speicherring HERA aufgezeichnet wurden. Die gemessenen Verteilungen werden mit Vorhersagen der QCD-Modelle LEPTO, ARIADNE und HERWIG verglichen. Der transversale Energiefluß wird von allen drei Modellen mit kleinen Unterschieden gut beschrieben. Die mittlere Transversalenergie $\langle E_T \rangle$ in der zentralen Region $-0,5 < \eta^\star < 0,5$ des hadronischen Schwerpunktsystems liegt bei etwa 2 GeV pro Einheitsintervall Pseudorapidität und steigt, entsprechend der Vorhersage einer auf der BFKL-Entwicklung basierenden QCD-Rechnung, mit abnehmendem x an. Ein Vergleich mit vorläufigen Resultaten von ZEUS zeigt sehr gute Übereinstimmung. Die Untersuchung der E_T-Verteilung in der zentralen Region des hadronischen Schwerpunktsystems offenbart bei kleinem x große Modellunterschiede in den hochenergetischen Ausläufern.

Abstract

In order to shed light on the QCD mechanism for parton evolution in the regime of small x Bjorken, the flow of transverse energy with pseudorapidity in the laboratory frame and the center of mass system has been measured in the kinematical domain $10^{-5} < x < 10^{-2}$ und $2,5 < Q^2 < 100$ GeV^2. The measurement is based on deep inelastic scattering events recorded in 1993 and 1994 with the H1 detector at HERA, including events with vertices shifted towards the proton direction. The measured distributions are compared with predictions of the QCD-models LEPTO, ARIADNE und HERWIG. The transverse energy flow is well described by all models with only slight differences between them. The observed magnitude of 2 GeV per unit pseudorapidity and the x dependence of the average transverse energy in the central region of the hadronic center of mass system is in agreement with a perturbative QCD calculation based upon the BFKL mechanism. The H1 data agree well with preliminary results of ZEUS. The investigation of the E_T distribution in the central unit of pseudorapidity reveals large differences beween the model predictions particularly at high E_T.

"Zwei Dinge erfüllen das Gemüth mit immer neuer und zunehmender Bewunderung und Ehrfurcht, je öfter und anhaltender sich das Nachdenken damit beschäftigt:
Der bestirnte Himmel über mir und das moralische Gesetz in mir."

Immanuel Kant

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Ziel der Elementarteilchenphysik ist die Erforschung der elementaren Bausteine der Materie und ihrer Wechselwirkungen untereinander. Der derzeitige, allgemein anerkannte Erkenntnisstand über die Struktur der Materie ist im Standardmodell der Elementarteilchenphysik [1, 2] formuliert.

Streuexperimente sind das wichtigste Werkzeug, um experimentell Teilchenstrukturen und Wechselwirkungen zu untersuchen. Schon zweimal in der Geschichte der Physik sorgte die Beobachtung der Streuung von Teilchen unter *großen Winkeln* für die revolutionäre Erweiterung der herrschenden Vorstellung vom Mikrokosmos. 1911 beobachtete Ernest Rutherford bei der Streuung von α-Teilchen an einer dünnen Goldfolie die nach dem herrschenden Thomson'schen Atommodell völlig unerwartete Ablenkung der α-Teilchen unter großen Streuwinkeln. Rutherford konnte diese Entdeckung mit der Annahme eines winzigen, positiv geladenen Atomkerns im Zentrum des Goldatoms theoretisch erklären. Das Thomson'sche Atommodell hatte ausgedient, es mußte dem von Nils Bohr 1913 formulierten Bohr'schen Atommodell weichen. In den sechziger Jahren gab wiederum die Beobachtung von gestreuten Teilchen unter ungewöhnlich großen Winkeln den ersten Hinweis darauf, daß auch Nukleonen ausgedehnte Objekte mit einer inneren Struktur sind. Seit dieser Zeit haben zahlreiche Experimente die Erforschung der Struktur des Protons zum Ziel [3].

Mit der Speicherringanlage HERA am DESY in Hamburg besteht seit Mitte des Jahres 1992 die Möglichkeit, die Streuung von Elektronen oder Positronen an Protonen bei einer Schwerpunktsenergie von 300 GeV durchzuführen. Die nominellen Strahlenergien betragen 30 GeV für die Elektronen und 820 GeV für die Protonen. Die hohen Strahlenergien erlauben die Untersuchung der tiefunelastischen Elektron-Proton-Streuung in einem bezüglich früherer Experimente mit ruhenden Zielkernen wesentlich erweiterten kinematischen Bereich. Das bei HERA gemessene maximale Quadrat des Impulsübertrages Q^2 liegt in der Größenordnung von 10^5 GeV^2, die kleinsten Impulsbruchteile x des an der Wechselwirkung beteiligten Quarks des Protons erreichen Werte in der Größenordnung von 10^{-5}.

Die Kenntnis der Partondichten und der Partondynamik im Proton liefert mit kleiner werdendem x ein zunehmend tieferes Verständnis der Struktur des Protons, sie ist zudem Voraussetzung für die Interpretation von Beobachtungen an zukünftigen Beschleunigeranlagen wie dem LHC (*Large Hadron Collider*) am CERN in Genf. Eines der wichtigsten Ergebnisse nach drei Jahren HERA-Betrieb ist der von den Experimenten H1 und ZEUS gemessene starke Anstieg der Proton-Strukturfunktion F_2 bei kleinem x. Im Rahmen der Theorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen (*Quantenchromodynamik* QCD) wurden unterschiedliche Konzepte für die Entwicklung der Partondichten, die der Strukturfunktion F_2 zugrundeliegen, in x und Q^2 erarbeitet.

Neben der Bestimmung der Strukturfunktion F_2 aus inklusiven Messungen ist die Untersuchung des hadronischen Endzustandes in der tiefunelastischen ep-Streuung geeignet, Aufschluß über die Partondynamik zu geben. Eine naheliegende und interessante Observable ist die Transversalenergie der Hadronen des Endzustandes. Die vorliegende Arbeit beschreibt die Messung des transversalen Energieflusses sowie der mittleren Transversalenergie in der zentralen Region des hadronischen Schwerpunktsystems als Funktion der kinematischen Variablen x und Q^2. Die mit dem H1-Detektor durchgeführte Messung wird mit Vorhersagen von Rechnungen und verschiedenen QCD-Modellen verglichen. Womöglich gibt die Messung der Transversalenergie ein Instrument an die Hand, Anwendbarkeit und Gültigkeitsbereich verschiedener Partonevolutionen zu überprüfen. Erste Resultate dieser Untersuchung auf Basis der 1993 aufgezeichneten tiefunelastischen Ereignisse wurden von der H1-Kollaboration in [4] veröffentlicht. Mit den 1994 aufgezeichneten Daten wurde die Analyse unter Ausnutzung der höheren Statistik und Verwendung von Ereignissen mit einem in Protonrichtung verschobenen Wechselwirkungspunkt in dem erweiterten kinematischen Bereich $10^{-5} < x < 10^{-2}$ und $2,5 < Q^2 < 100$ GeV^2 wiederholt.

Die Arbeit ist in sechs Kapitel gegliedert. Im ersten Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der tiefunelastischen ep-Streuung erarbeitet; das Kapitel mündet in der Motivation für die durchgeführten Messungen. Im zweiten Kapitel werden die Speicherringanlage HERA und das H1-Experiment vorgestellt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf den für die Energiemessung verwendeten Kalorimetern. Die in der Arbeit zum Einsatz kommenden Monte Carlo-Modelle LEPTO, ARIADNE, HERWIG, DJANGO, PHOJET und RAPGAP für die Simulation von tiefunelastischen Ereignissen und Untergrundprozessen werden im dritten Kapitel eingeführt. Im vierten Kapitel wird die Selektion verschiedener untergrundfreier Datensätze tiefunelastischer Ereignisse besprochen. Die Meßergebnisse sowie die Untersuchung der systematischen Fehlerbeiträge werden im fünften Kapitel vorgestellt. Die Arbeit schließt mit der Diskussion der Meßergebnisse, ihrer möglichen Interpretation, dem Vergleich mit anderen Experimenten und einem Ausblick.

Kapitel 1

Tiefunelastische Elektron–Proton–Streuung

Die Streuung von Teilchen an Teilchen ist das wichtigste Werkzeug, um experimentell Teilchenstrukturen und Wechselwirkungen zu untersuchen. Seit dem Jahr 1992 besteht mit der HERA-Beschleunigeranlage am DESY die Möglichkeit, die Streuung von 27 GeV-Elektronen oder Positronen an 820 GeV-Protonen durchzuführen. In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der tiefunelastischen Elektron–Proton–Streuung[1] erarbeitet. Nach einer Einführung in die Kinematik des Streuprozesses und die Theorie der starken Wechselwirkung werden die Konzepte der Evolution von Partondichten erläutert. Am Ende des Kapitels wird die Motivation für die in dieser Arbeit vorgestellte Messung dargelegt.

1.1 Kinematik

Der tiefunelastische Streuprozeß (*deep inelastic scattering*, DIS) eines Elektrons an einem Proton kann formal geschrieben werden als

$$e^-(k) + p(P) \rightarrow e^-(k') + X. \tag{1.1}$$

Den zugehörigen Feynmangraphen in niedrigster Ordnung QED (*Quantenelektrodynamik*) zeigt Abbildung 1.1. Die einlaufenden Teilchen Elektron und Proton mit den Viererimpulsen k und P wechselwirken miteinander durch Austausch eines Bosons (Photons). Im Endzustand werden das auslaufende Elektron mit dem Viererimpuls k' und das hadronische System X beobachtet. Der Vierervektor des ausgetauschten Photons γ ist durch $q = k - k'$ gegeben. Es ist üblich, den Impulsübertrag zwischen Elektron und Proton als positive Lorentzinvariante Q^2 zu definieren

$$Q^2 := -q^2 = -(k-k')^2 \qquad (Q^2 > 0). \tag{1.2}$$

[1]Da im Rahmen der vorliegenden Arbeit elektroschwache Effekte vernachlässigt werden können, wird im folgenden vereinfachend das Lepton durchweg als Elektron bezeichnet. Im Falle daß eine physikalische Observable auf die unterschiedliche Verwendung von Elektron oder Positron als Strahlteilchen sensibel ist, wird darauf hingewiesen.

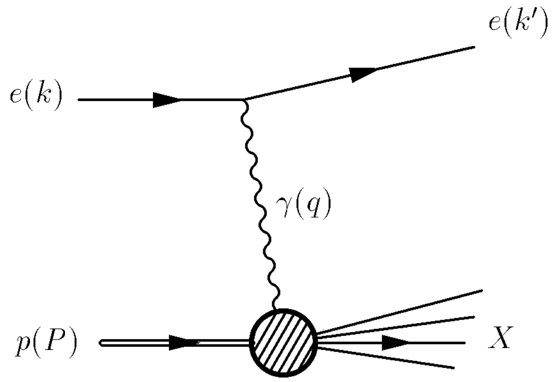

Abb. 1.1: Tiefunelastische ep–Streuung in niedrigster Ordnung QED unter Annahme des Austauschs eines Photons γ. Das einlaufende Proton p bricht in das hadronische System X auseinander.

Die innere Struktur des Protons wird nun umso besser aufgelöst, je kleiner die Compton-Wellenlänge λ_c [6] des Vektorbosons ist: $\lambda_c \sim 1/\sqrt{Q^2}$. Für zunehmende Werte von Q^2 nehmen demnach Auflösungsvermögen und Virtualität des Photons zu.

Ist das ausgetauschte Boson ein virtuelles Photon γ oder ein Z^0, handelt es sich um ein Ereignis des neutralen Stroms (*neutral current*, NC) ohne Ladungsaustausch zwischen Elektron und Proton. Ist hingegen das ausgetauschte Boson ein $W^\pm$, spricht man von einem Ereignis des geladenen Stroms (*charged current*, CC). Der Wirkungsquerschnitt für ein Ereignis des neutralen Stroms setzt sich aus drei Termen zusammen; je einem für den γ und Z^0-Austausch sowie dem γZ^0-Interferenzterm:

$$\sigma_{NC}(ep \to eX) = \sigma(\gamma) + \sigma(\gamma Z^0) + \sigma(Z^0). \tag{1.3}$$

$\sigma(\gamma)$ ist der führende Beitrag, die Z^0-Beiträge werden aufgrund der Struktur des Z^0-Propagators erst bei sehr hohen Q^2 relevant:

$$\frac{\sigma(\gamma Z^0)}{\sigma(\gamma)} = \frac{Q^2}{Q^2 + M_{Z^0}^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\sigma(Z^0)}{\sigma(\gamma)} = \left(\frac{Q^2}{Q^2 + M_{Z^0}^2}\right)^2. \tag{1.4}$$

M_{Z^0} ist die Masse des Eichbosons Z^0. In dieser Arbeit werden NC-Ereignisse mit $Q^2 < 100$ GeV^2 untersucht. Damit gilt $Q^2 \ll M_{Z^0}^2$, und die Z_0-Beiträge zur ep–Streuung sind vernachlässigbar klein[2].

Für die in Abbildung 1.1 dargestellte Elektron–Proton–Streuung lassen sich neben Q^2 weitere Lorentzinvarianten aus Produkten zweier Vierervektoren definieren:

- s, das Quadrat der Elektron-Proton Schwerpunktsenergie:

$$s = (P + k)^2\ ; \tag{1.5}$$

[2] Die Masse des Z^0 ist 91,2 GeV. Im gewählten Einheitensystem gilt $c = h/2\pi = 1$ [5].

- x, die Bjorken–Skalenvariable:

$$x = \frac{Q^2}{2Pq} \qquad (0 \leq x \leq 1)\ ; \tag{1.6}$$

- y , eine Skalenvariable, die im Ruhesystem des Protons den relativen Energieverlust des Elektrons, bezogen auf die Energie des einlaufenden Elektrons, angibt:

$$y = \frac{Pq}{Pk} \qquad (0 \leq y \leq 1)\ ; \tag{1.7}$$

- W^2 , das invariante Massenquadrat des hadronischen Endzustandes X

$$W^2 = (P+q)^2 \qquad (P^2 \leq W^2 \leq s). \tag{1.8}$$

Der Streuprozeß heißt *elastisch*, wenn $x = 1$ und damit $W^2 = P^2$. Im Endzustand werden das gestreute Elektron und das Proton beobachtet. Die Kinematik des elastischen Ereignisses ist durch Angabe nur einer kinematischen Variablen, wie beispielsweise des Impulsübertrages Q^2, festgelegt.

Der Streuprozeß heißt *tiefunelastisch*, wenn $Q^2 \gg m_p^2$ und das Proton in das hadronische System X mit dem invarianten Massenquadrat $W^2 \gg m_p^2$ auseinanderbricht. Für tiefunelastische Ereignisse können somit die Ruhemassen des Elektrons m_e und des Protons m_p im allgemeinen vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung gelten die Relationen

$$x = \frac{Q^2}{sy} \qquad \text{und} \qquad W^2 = Q^2\frac{1-x}{x}. \tag{1.9}$$

Von den definierten kinematischen Variablen sind bei gegebener Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = \sqrt{4E_eE_p}$ nur zwei voneinander unabhängig, so daß die Kinematik des tiefunelastischen Ereignisses bei bekannten Strahlenergien E_e und E_p durch Angabe zweier kinematischer Variablen vollständig bestimmt ist. Beispielsweise können die Variablen Q^2 und y aus den gemessenen Größen Energie und Winkel des gestreuten Elektrons gewonnen werden (siehe Kapitel 4.3).

Der Prozeß heißt *Photoproduktion*, wenn $Q^2 \simeq 0$ und somit das ausgetauschte Photon quasi reell ist. Da der Wirkungsquerschnitt für die *ep*-Streuung in Gleichung 1.1 für $Q^2 \rightarrow 0$ stark anwächst, liefern Photoproduktionsereignisse den um ein Vielfaches dominierenden Beitrag zum totalen Wirkungsquerschnitt.

1.2 Der Wirkungsquerschnitt

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung unpolarisierter Elektronen an Protonen kann in der 1-Photon-Austausch-Näherung als Produkt aus einem leptonischen und einem hadronischen Tensor geschrieben werden (z.B. [2]):

$$\frac{d^2\sigma(ep \rightarrow eX)}{dE'\,d\Omega} \sim \frac{\alpha^2}{q^4}\ L^{\mu\nu}(k,q) \cdot W_{\mu\nu}(P,q). \tag{1.10}$$

Hierbei und im folgenden bedeuten

$d\Omega$	:	Raumwinkelelement um Richtung des gestreuten Elektrons
$\alpha = e^2/4\pi$	:	Feinstrukturkonstante der QED
$L^{\mu\nu}(k,q)$	:	Leptonischer Tensor
$W_{\mu\nu}(P,q)$	:	Hadronischer Tensor
E_e, E'_e	:	Energie des einlaufenden und gestreuten Elektrons
$\nu = Pq/m_p$	:	Energieverlust des Elektrons im Protonruhesystem
E_p, m_p	:	Energie und Ruhemasse des einlaufenden Protons
θ_e	:	Streuwinkel des Elektrons bezüglich der positiven z-Achse.

Die positive z-Achse im Laborsystem zeigt in Richtung des einlaufenden Protonstrahls.

Der leptonische Tensor $L^{\mu\nu}$ kann explizit berechnet werden. Er ergibt sich aus den Matrixelementen des Produktes der Diracströme j^μ und j^ν, summiert über die beiden Spineinstellungen des Elektrons. Der unbekannte hadronische Tensor $W_{\mu\nu}$ wird nach skalaren Strukturfunktionen W_i entwickelt. Unter Berücksichtigung von Symmetrieeigenschaften des Tensors und der Erhaltung des elektromagnetischen Stromes verbleiben für den Photonaustausch zwei unabhängige Strukturfunktionen. Im Ruhesystem des Protons gilt

$$\frac{d^2\sigma(ep \to eX)}{dE'_e\, d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2_e}{Q^4}\left[W_2(\nu, Q^2)\sin^2\frac{\theta_e}{2} \; + \; 2W_1(\nu, Q^2)\cos^2\frac{\theta_e}{2}\right]. \tag{1.11}$$

Die reellen Funktionen $W_i(\nu, Q^2)$ werden gewöhnlich ersetzt durch dimensionslose Strukturfunktionen $F_i(x, Q^2)$, die im nachfolgenden Quark-Parton-Modell eine einfache Interpretation erfahren: $m_p W_1 = F_1$ und $\nu W_2 = F_2$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt kann dann geschrieben werden als[3]

$$\frac{d^2\sigma(ep \to eX)}{dx\, dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4}\left[y^2 x F_1(x, Q^2) \; + \; (1-y)F_2(x, Q^2)\right]. \tag{1.12}$$

Mit Hilfe des Parameters R, der das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte zwischen longitudinal und transversal polarisierten virtuellen Photonen bezeichnet[4],

$$R = \frac{\sigma_L}{\sigma_T} = \frac{F_L}{2xF_1} = \frac{F_2 - 2xF_1}{2xF_1}, \tag{1.13}$$

können wir abschließend für den Wirkungsquerschnitt der tiefunelastischen Streuung (vergl. Gleichung 1.12) schreiben

$$\frac{d^2\sigma(ep \to eX)}{dx\, dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4}\left[2(1-y) + \frac{y^2}{1 + R(x, Q^2)}\right] F_2(x, Q^2). \tag{1.14}$$

[3] Der Wirkungsquerschnitt $\sigma(e^\mp p \to eX)$ ist für sehr große Q^2 ($Q^2 \gg 100$ GeV^2) unterschiedlich für Elektronen und Positronen. Der Beitrag des Z_0-Austauschs zum Wirkungsquerschnitt wird in Gleichung 1.12 durch einen dritten Strukturfunktionsterm $\pm y(1 - \frac{y}{2})xF_3(x, Q^2)$ berücksichtigt.

[4] F_L wird die *longitudinale Strukturfunktion* des Protons genannt.

1.3 Quark-Parton-Modell und Skaleninvarianz

Das naive Quark-Parton-Modell (QPM) wurde Ende der 60er Jahre mit großem Erfolg eingeführt [7, 8]. Die beiden Grundannahmen des Parton-Modells sind [1]:

- *Annahme I:* Ein schnell bewegtes Hadron kann aufgefaßt werden als ein Bündel von Partonen, die in dieselbe Richtung wie das Mutter-Hadron fliegen. Die Partonen teilen sich den Dreierimpuls des Hadrons.

- *Annahme II:* Für harte Reaktionen mit hohem Impulsübertrag kann die Impulsapproximation verwendet werden. Danach verhalten sich die Partonen während der harten Wechselwirkung wie quasi-freie Teilchen[5]. Für die Berechnung von Streuquerschnitten werden die Beiträge aller Partonen inkohärent, d. h. ohne Streuwellen-Interferenzterme, aufsummiert.

Im Quark–Parton–Modell besteht das Proton aus drei punktförmigen, geladenen Spin-$\frac{1}{2}$ -Konstituentenquarks ($p \sim uud$), die zusammen die Quantenzahlen des Protons tragen und sich insbesondere den Impuls des Protons teilen. Die tiefunelastische ep–Streuung wird interpretiert als elastische Streuung des virtuellen Photons γ an einem Konstituentenquark des Protons. Abbildung 1.2 zeigt den Feynmangraphen der elastischen Streuung im QPM unter Annahme des Austauschs eines Photons.

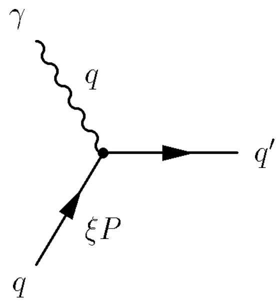

Abb. 1.2: Feynmangraph des harten Subprozesses $\gamma^\star q \to q'$ im QPM. Die Viererimpulse der einlaufenden Teilchen sind q und ξP.

Der Wirkungsquerschnitt ist dann gegeben als Wahrscheinlichkeit $q_f(\xi)$, im Proton ein Quark der Sorte f mit longitudinalem Impulsanteil ξ zu finden, multipliziert mit dem Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung an diesem Quark [9]:

$$\frac{d^2\sigma(ep \to eX)}{dx\, dQ^2}(P,q) = \sum_f \int_0^1 d\xi\, q_f(\xi)\, \frac{d^2\sigma_f^{Born}(eq \to eq')}{dx\, dQ^2}(\xi P, q). \tag{1.15}$$

[5]Im sogenannten *Infinite-Momentum-Frame* des Protons ist die Wechselwirkung der Partonen untereinander "eingefroren", die Wechselwirkungszeit des Partons mit dem Photon ist klein gegenüber der Wechselwirkungszeit der Partonen untereinander.

Das Faltungsintegral in Gleichung 1.15 kann symbolisch geschrieben werden als $q \otimes \sigma^{Born}$. Der differentielle Born-Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung des Elektrons an einem Konstituentenquark der Sorte f mit der elektrischen Ladung e_f ist gegeben durch

$$\frac{d^2\sigma_f^{Born}(eq \to eq')}{dx\, dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} e_f^2 \left[1 + (1-y)^2\right] \delta(x - \xi) \ . \tag{1.16}$$

Für $Q^2 \gg m_p^2$ und unter Vernachlässigung der Partonmasse gilt die Massenschalenbedingung:

$$q'^2 = (\xi P + q)^2 \ = \ 0 \tag{1.17}$$

$$\Longrightarrow \qquad \xi \ \approx \ \frac{Q^2}{2Pq} = x \ . \tag{1.18}$$

Die Bjorken-Skalenvariable x wird demnach im Quark-Parton-Modell mit dem relativen Anteil ξ am Protonimpuls, den das am Streuprozeß beteiligte Parton trägt, identifiziert. Die Deltafunktion in Gleichung 1.16 bringt diese Identifikation zum Ausdruck. Im folgenden setzen wir $\xi = x$.

Einsetzen von Gleichung 1.16 in Gleichung 1.15 und Vergleich mit Gleichung 1.12 liefert für die Strukturfunktionen F_1 und F_2:

$$F_2(x) = 2xF_1(x) = \sum_f \int_0^1 d\xi\, x\, q_f(\xi)\, e_f^2\, \delta(x - \xi) \tag{1.19}$$

$$\frac{F_2(x)}{x} = \sum_f e_f^2\, q_f(x), \tag{1.20}$$

wobei $q(x)$ allgemein als Partondichte bezeichnet wird[6]. Die beiden wichtigen Aspekte dieser Ausdrücke sind:

- Die Strukturfunktionen F_i hängen nur noch von der dimensionslosen Bjorken-Skalenvariablen x ab, sie sind unabhängig vom Impulsübertrag Q^2 oder einer anderen Skala. Dieses Verhalten wird *Bjorken-Skaleninvarianz* [10] genannt[7]. Ihre Entdeckung 1969 am Linearbeschleuniger in Stanford (SLAC) [11] führte zur Formulierung des Quark-Parton-Modells.

- Die beiden Strukturfunktionen genügen der Gleichung $2xF_1 = F_2$. Diese Beziehung wird als *Callan-Gross-Beziehung* [12] bezeichnet[8]. Da sie bei abgeschalteter starker Wechselwirkung eine direkte Konsequenz des Spin-$\frac{1}{2}$-Charakters der Quarks darstellt, untermauerte ihre Bestätigung 1969 am DESY [13] die Hypothese, daß das Proton aus punktförmigen Spin-$\frac{1}{2}$-Konstituenten aufgebaut ist. Die Callan-Gross-Beziehung impliziert $R = 0$ (Gleichung 1.13).

[6] Das Integral $\int_0^1 q_f(x)dx = N_f$ ist die Anzahl der Partonen der Sorte f im jeweiligen Hadron.
[7] Häufig einfach als *scaling* bezeichnet.
[8] Die Callan-Gross-Beziehung ist nur im naiven Quark-Parton-Modell gültig.

1.4 Quarks und Gluonen

Eine der Grundannahmen des Quark-Parton-Modells ist, daß sich die Partonen den Impuls des Protons teilen. Die Summe über die von den einzelnen Partonarten getragenen Impulsanteile müßte demnach Eins ergeben:

$$\int_0^1 dx \sum_f x\, q_f(x) = 1. \tag{1.21}$$

Die experimentellen Daten früherer Streuversuche [14, 15] ergaben, daß obiges Integral nur etwa 0,5 beträgt. Diese Beobachtung spricht für die Existenz von Gluonen, die bezüglich der elektroschwachen Wechselwirkung neutral sind, jedoch ebenfalls Farbe tragen. In der Tat fordert die Theorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks, die Quantenchromodynamik (QCD), die Existenz zusätzlicher Vektorteilchen, die mit den Gluonen identifiziert werden.

Die Quantenchromodynamik ist die Eichtheorie der starken Wechselwirkung mit der nichtabelschen Farb-Eichgruppe $SU(3)_C$ [9]. Farbladungsträger sind die Partonen, die elektrisch geladenen Quarks und die neutralen Gluonen. Die massiven Quarks mit Spin-$\frac{1}{2}$ (Fermionen) und drittelzahliger Ladung kommen in 6 verschiedenen Sorten (*flavors*) vor (u, d, s, c, b, t) und bilden Farb-Tripletts. Die Bindungszustände der QCD sind Farb-Singulett-Zustände, die Hadronen mit all ihren im Experiment beobachtbaren Eigenschaften[9] [18].

Die starke Wechselwirkung zwischen Farbladungsträgern wird durch den Austausch von Gluonen (den Eichbosonen der QCD) beschrieben. Die masselosen und flavor-neutralen Gluonen bilden ein Farb-Oktett. Da sie wie die Quarks Farbe tragen, können sie mit sich selbst wechselwirken (nichtabelsche Gruppe).

1.5 Die Kopplungskonstante α_s

Die Stärke, mit der Quarks und Gluonen untereinander koppeln, ist durch die Kopplungskonstante α_s gegeben. Bei quantitativen Berechnungen von Wirkungsquerschnitten in der QCD-Störungstheorie (*perturbative* QCD) treten bei der Auswertung von Schleifenintegralen *Ultraviolett-Divergenzen* auf, die durch das Verfahren der *Renormierung* beseitigt werden [17]. Dadurch wird die Kopplungskonstante α_s abhängig von einer *Renormierungsskala*. Es ist üblich, den Viererimpulsübertrag Q^2 als Skala anzusetzen. Die Abhängigkeit der effektiven Kopplungskonstanten α_s von Q^2 ist durch die Renormierungsgruppengleichung gegeben. Fundamental für die Möglichkeit störungstheoretischer QCD-Rechnungen, die einen genügend kleinen Entwicklungsparameter erfordern, ist die

[9]Es scheint, daß Quarks permanent in den Hadronen eingeschlossen und damit als freie Teilchen nicht beobachtbar sind. Zumindest haben alle Experimente, bei denen nach Teilchen mit nichtganzzahliger Ladung gesucht wurde, ein negatives Resultat ergeben [16].

sogenannte *asymptotische Freiheit.* In führender Ordnung QCD verschwindet die effektive Kopplungskonstante für $Q^2 \to \infty$, falls die Anzahl der aktiven[10] Quark-Flavors n_f kleiner oder gleich 16 ist. Die Partonen können dann als freie Teilchen betrachtet werden:

$$\alpha_s\ (Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f)\log(Q^2/\Lambda^2)} \stackrel{Q^2\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (\text{für } n_f \leq 16). \tag{1.22}$$

Der Parameter Λ legt letztendlich die Stärke der starken Kopplung fest, er ist aus dem Experiment zu bestimmen. Anschaulich gesprochen markiert Λ die Grenze zwischen der Welt der quasi-freien Quarks und Gluonen und der Welt der beobachtbaren Hadronen[11]. Um den Parameter Λ eindeutig zu definieren, müssen ein Renormierungsschema festgelegt und die theoretischen Rechnungen für den betrachteten Prozeß bis zur 2. Ordnung in α_s durchgeführt werden [1]. Heute benutzt man häufig das sogenannte $\overline{MS}$-Schema [19]. Nach einer kombinierten Analyse von Daten verschiedener Experimente zur tiefunelastischen Lepton-Nukleon-Streuung ergibt sich für $n_f = 4$ folgender Wert für den QCD-Parameter [5]: $\Lambda_{\overline{MS}} = 234 \pm 24 \pm 50$ MeV.

Gleichung 1.22 wird als Darstellung von α_s in führender Ordnung (*leading order*, LO) bezeichnet. Die laufende Kopplungsstärke nimmt logarithmisch ab. Man kann zeigen, daß dieses asymptotisch freie Verhalten typisch für nichtabelsche Eichtheorien ist [20].

1.6 QCD-Störungsrechnung in 1. Ordnung α_s

Das Parton-Modell ignoriert die dynamische Rolle der Gluonen als Austauschteilchen der starken Wechselwirkung vollständig. In der QCD besteht für Farbladungsträger jedoch die Möglichkeit der Abstrahlung eines Gluons g. Formal kann das QPM als QCD-Störungstheorie zur 0. Ordnung in α_s aufgefaßt werden. Bei der Berechnung von Wirkungsquerschnitten in 1. Ordnung α_s ($O(\alpha_s)$) müssen virtuelle und reelle QCD-Korrekturen zum Graphen des Quark-Parton-Modells in Abbildung 1.2 berücksichtigt werden. Die Feynmangraphen virtueller Korrekturen sind in Abbildung 1.3 dargestellt. Diese sogenannten Gluonschleifen verändern den beobachtbaren Endzustand nicht[12].

Abbildung 1.4 zeigt die reellen QCD-Korrekturen der Ordnung α_s . Es handelt sich um die Prozesse $\gamma^\star q \to qg$ (QCD-Compton-Prozeß, QCDC) und $\gamma^\star g \to qq$ (Boson-Gluon-Fusion, BGF), die in QCD-Störungstheorie zur Ordnung α_s zusätzlich zum QPM-Prozeß $\gamma^\star q \to q$ zu berechnen sind. Die Berücksichtigung dieser QCD-Diagramme hat zwei experimentell beobachtbare Konsequenzen. Zum einen wird, wie bereits erwähnt, die Skaleninvarianz der Strukturfunktionen verletzt [21, 22]. Zum anderen erhöht sich

[10] Ist m_f die Masse eines Quarks der Sorte f, so gilt für die aktiven Quarkflavors eines Prozesses mit der Skala Q^2: $m_f^2 < Q^2$.

[11] In diesem Bild sollte der Wert für Λ in der Größenordnung einer typischen hadronischen Masse von $0.1 - 1$ GeV liegen.

[12] Für die Berechnung eines Prozesses in $O(\alpha_s)$ erfolgt zuerst die Summation aller Feynmangraphen, die zu demselben Endzustand führen, und anschließend die Bildung des Betragsquadrates. Bei der Auswertung der Reihe werden die Terme $O(\alpha_s^2)$ vernachlässigt.

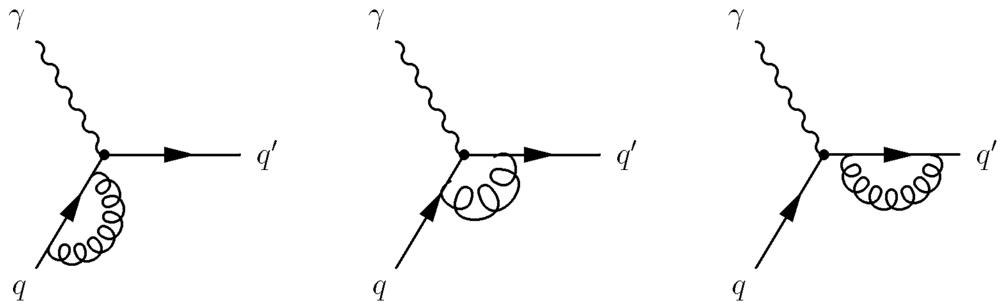

Abb. 1.3: Virtuelle QCD-Korrekturen zum QPM-Prozeß. Korrektur am einlaufenden Quark (links), Vertexkorrektur (Mitte) und Korrektur am auslaufenden Quark (rechts).

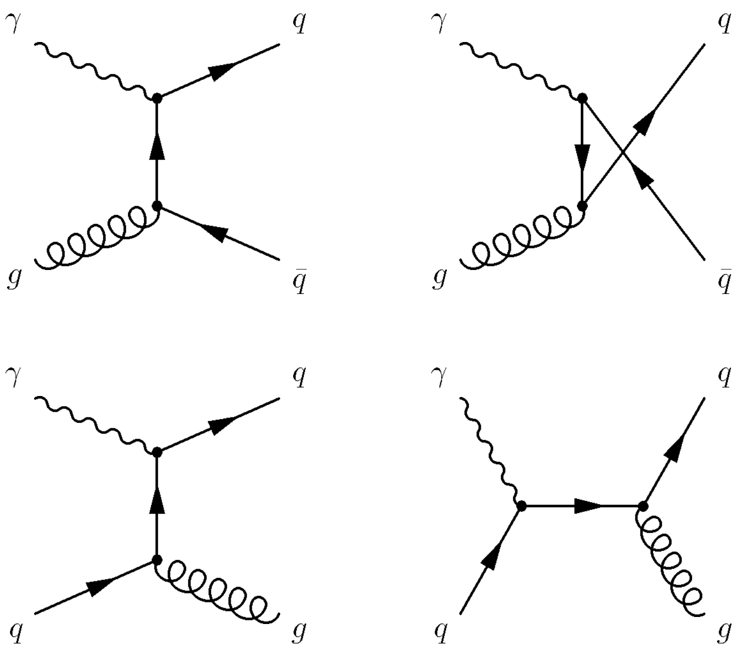

Abb. 1.4: Feynmangraphen der Ordnung α_s für die Boson-Gluon-Fusion (obere Reihe) und den QCD-Compton-Prozeß (untere Reihe).

die Zahl der Partonen im Endzustand um eins. Das Quark, das ein Gluon abstrahlt, wird einen Rückstoß erfahren und damit eine Transversalimpulskomponente gewinnen, so daß im $\gamma^\star q$-Ruhesystem das gestreute Quark nicht länger kollinear mit dem einfallenden Proton ist. Wenn es sich um eine genügend harte Abstrahlung handelt, sollten zwei Hadron-Jets beobachtet werden können.

Partondichten und Wirkungsquerschnitt

Gleichung 1.20 wird bei Berücksichtigung des QCD-Compton-Prozesses $\gamma^\star q \to qg$ wie folgt modifiziert [2]:

$$\frac{F_2(x,Q^2)}{x} = \sum_f e_f^2 \int_x^1 \frac{d\xi}{\xi} q_f(\xi) \left(\delta(1-\frac{x}{\xi}) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(\frac{x}{\xi}) \log\frac{Q^2}{\mu^2} \right). \qquad (1.23)$$

Die Integration über die möglichen Transversalimpulse k_T des abgestrahlten Gluons $\int_{\mu^2}^{\sim Q^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2}$ führt zu dem Term $\log \frac{Q^2}{\mu^2}$. Der Abschneideparameter μ wird eingeführt, um die kollineare Singularität, die für $k_T^2 \to 0$ auftritt, zu umgehen. $P_{qq}(\frac{x}{\xi})$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Quark mit Impulsbruchteil ξ ein Gluon abstrahlt und anschließend den reduzierten Impulsanteil $x = z\xi$ trägt ($z \leq 1$). Sie kann berechnet werden; in führender Ordnung QCD-Störungstheorie gilt

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3}\left(\frac{1+z^2}{1-z}\right). \tag{1.24}$$

Die $z \to 1$ Singularität resultiert aus der Abstrahlung eines niederenergetischen Gluons. Diese sogenannte *Infrarot-Divergenz* wird durch Beiträge der virtuellen Gluonschleifen in Abbildung 1.3 kompensiert[13].

Die Singularität des Terms $\log \frac{Q^2}{\mu^2}$ für $\mu \to 0$ in Gleichung 1.23 wird durch die kollineare Abstrahlung eines Gluons vom einlaufenden Quark verursacht (*Kollineare Divergenz, Massensingularität*). Diese Art von Divergenzen wird mit Hilfe des Konzeptes der *Faktorisierung* beseitigt. Durch Einführung einer *Faktorisierungsskala* μ_f^2 kann der die Divergenz verursachende Logarithmus in einen endlichen und einen divergenten Anteil aufgespalten werden:

$$\log \frac{Q^2}{\mu^2} = \log \frac{Q^2}{\mu_f^2} + \log \frac{\mu_f^2}{\mu^2}. \tag{1.25}$$

Der divergente Teil $\log \frac{\mu_f^2}{\mu^2}$ wird nun, analog dem Verfahren der Renormierung, beseitigt und die Quarkdichte $q_f(\xi)$ entsprechend umdefiniert, womit sie abhängig von der Faktorisierungsskala μ_f^2 wird:

$$q_f(\xi, \mu_f^2) = q_f(\xi)\left(1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \log \frac{\mu_f^2}{\mu^2}\right). \tag{1.26}$$

Durch den Kunstgriff der *Absorption* der Divergenz in die Quarkdichte findet die kollineare Gluonabstrahlung innerhalb des Protons statt, sie gehört zum Protonrest und nicht zum beobachtbaren hadronischen Endzustand. Die Wahl der Faktorisierungsskala ist beliebig. Die Skala μ_f wird gewöhnlich mit dem Viererimpulsübertrag Q^2 gleichgesetzt. Für die Strukturfunktion F_2 aus Gleichung 1.20 bedeutet dies

$$\frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_f e_f^2\, q_f(x, Q^2). \tag{1.27}$$

Der Formalismus der Faktorisierung macht allgemein Partondichten und nach Gleichung 1.27 auch Strukturfunktionen skalenabhängig. Die Skalenabhängigkeit der Partondichten, also die Verletzung der Bjorken-Skaleninvarianz, kann auch im Quark-Parton-Modell veranschaulicht werden: Die effektiven Konstituenten des Protons sind

[13]Bei Berücksichtigung virtueller Korrekturen wird der Faktor $1/(1-z)$ in Gleichung 1.24 ersetzt durch die Distribution $1/(1-z)_+$: $P_{qq}(z) = \frac{4}{3}\left[\frac{1+z^2}{1-z}\right]_+ + 2\delta(1-z)$. Die Distribution $1/(1-z)_+$ ist mittels einer glatten Funktion $f(z)$ definiert als $\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{f(z)-f(1)}{1-z}$.

durch eine transversale Ausdehnung $1/K$ charakterisiert, die ganz vom Auflösungsvermögen des ausgetauschten virtuellen Photons abhängt. Wird für effektive *Größe* der Konstituenten $1/K \sim 1/\sqrt{Q^2}$ angenommen, so kann die Impulsapproximation des Parton-Modells übernommen werden. Alle Quarkverteilungen beziehen sich dann auf effektive Konstituenten und werden von deren *Größe* und damit von Q^2 abhängen.

1.7 Die GLAP-Gleichungen

Um die Änderung der Partondichten für große Q^2 zu bestimmen, kann die Störungstheorie angewandt werden. Die dynamische Entwicklung der Partondichten in Q^2 wird durch ein System von gekoppelten Integro-Differentialgleichungen beschrieben, das zuerst von Gribov und Lipatov [23] für eine abelsche Theorie formuliert und später von Altarelli und Parisi [24] für den Fall der QCD erweitert wurde[14]. In führender Ordnung muß die Änderung der Partondichten proportional zu $\alpha_s(Q^2)$ sein:

$$\frac{dq(x,Q^2)}{d\log Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\int_x^1 \frac{d\xi}{\xi}\left[q(\xi,Q^2)\,P_{qq}\left(\frac{x}{\xi}\right) + g(\xi,Q^2)\,P_{qg}\left(\frac{x}{\xi}\right)\right], \quad (1.28)$$

$$\frac{dg(x,Q^2)}{d\log Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\int_x^1 \frac{d\xi}{\xi}\left[g(\xi,Q^2)\,P_{gg}\left(\frac{x}{\xi}\right) + \sum_q q(\xi,Q^2)\,P_{gq}\left(\frac{x}{\xi}\right)\right]. \quad (1.29)$$

Hierbei sind $q(x,Q^2)$ die Quarkdichten und $g(x,Q^2)$ die Gluondichte. Quark-Antiquark-Paare, die durch den Prozeß $g \to q\bar{q}$ entstehen, nennt man See-Quarks. Die Quarkdichten q können in einen See- und einen Valenz-Anteil aufgespalten werden: $q = q_{val} + q_{see}$. Die u-Quarkverteilung im Proton ist dann $u_{val} = u - \bar{u}$ und $u_{see} = \bar{u}$.

Die *Verzweigungsfunktionen* $P_{ij}(z)$ $(i,j = q,g)$ geben die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß ein Parton j durch Abstrahlung eines Partons k (mit dem Impulsanteil $1-z$ von j) in ein Parton i (mit dem Impulsanteil z von j) übergeht (siehe Abbildung 1.5). Die Verzweigungsfunktion P_{qq} wurde bereits explizit in Gleichung 1.24 angegeben.

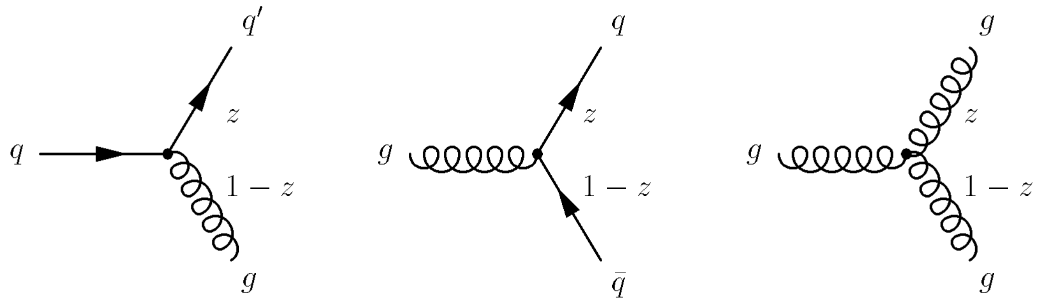

Abb. 1.5: Feynmangraphen zur Ordnung α_s (von links nach rechts) für die Prozesse $q \to q'g$ $(P_{q'q}, P_{gq})$, $g \to q\bar{q}$ (P_{qg}), $g \to gg$ (P_{gg}).

[14]Die genannten Autoren werden kurz mit GLAP bezeichnet. Üblich ist auch die Bezeichnung DGLAP für Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi [25].

Die GLAP-Gleichungen beschreiben eine störungstheoretische Entwicklung der Partondichten nach Potenzen von $[\alpha_s \log(Q^2/\mu^2)]^n$. Die untere Grenze des Integrals in den GLAP-Gleichungen ist x, so daß die Parametrisierungen der Partondichten in der Q^2-Entwicklung nur für $\xi > x$ bekannt sein müssen. Ausgehend von gegebenen Parametrisierungen an der Stelle Q_0^2 lassen sich Partondichten an einer beliebigen Stelle Q^2 durch Lösen dieser Integro-Differentialgleichungen berechnen[15].

Bei kleinen Werten von x wird die Struktur des Protons von den Gluonen dominiert [27]. Die dynamische Q^2-Entwicklung der Gluondichte $g(x, Q^2)$ kann mit Hilfe eines sogenannten Leiterdiagramms dargestellt werden. Das in Abbildung 1.6 gezeigte Leiterdiagramm basiert auf dem gluon-initiierten Prozeß der BGF. Die n Sprossen der Leiter sind die sukzessive abgestrahlten Gluonen g_i $(i = 1, n)$, die einen longitudinalen Impulsbruchteil x_i des Protonimpulses und einen Transversalimpuls $k_{T,i}$ relativ zum Proton tragen.

Unter der Annahme, daß für die Transversalimpulse $k_{T,i}$ aufeinanderfolgender Partonemissionen $k_{T,i+1} \gg k_{T,i}$ gilt, entspricht die Entwicklung einer Anfangsverteilung $g(x, Q_0^2)$ zu höheren Q^2 einer Summation der führenden n Logarithmen $(\alpha_s \log Q^2)^n$. In dieser für die Auswertung des Leiterdiagramms sinnvollen Näherung nimmt aufgrund der Impulserhaltung auch der Transversalimpuls und damit die Virtualität Q^2 des abstrahlenden Partons beim *Hinaufklettern* der n Leitersprossen zu. Aufgrund der Impulserhaltung wird bei jeder Gluonabstrahlung der Longitudinalimpuls des emittierenden Partons (des Leiterholmes) auf das abgestrahlte Gluon und das Parton nach der Abstrahlung aufgeteilt. x_i wird demnach mit jeder Abstrahlung zunehmend kleiner. Die beiden Ordnungsschemata für aufeinanderfolgende Partonemissionen im Rahmen der GLAP-Entwicklung lauten:

- Die Transversalimpulse $\sqrt{k_{T,i}^2}$ der abgestrahlten Partonen sind streng geordnet: $k_{T,i}^2 \ll k_{T,i+1}^2 \ll \ldots \ll Q^2$.
- Die skalierten Longitudinalimpulse x_i der abgestrahlten Partonen sind hingegen in umgekehrter Richtung einfach geordnet: $x_i > x_{i+1} > \ldots > x$.

Nach Beendigung der Entwicklung wird am $\gamma^\star q$-Vertex die Partondichte mit dem Born-Wirkungsquerschnitt gefaltet (Gleichung 1.15). Am Vertex sind die kinematischen Variablen x und Q^2 durch die Messung festgelegt.

Der Bereich, in dem die Approximation der GLAP-Gleichungen gültig ist, wird durch

$$\alpha_s(Q^2) \log \frac{Q^2}{Q_0^2} \simeq 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha_s(Q^2) \log \frac{1}{x} \ll 1 \tag{1.30}$$

[15] Die GLAP-Gleichungen können entweder gelöst werden durch numerische Integration in kleinen $\log Q^2$-Schritten, oder durch die inverse Mellin-Transformation der Momente der x-Verteilung. Bei Multiplikation von Gleichung 1.28 mit $\int_0^1 \frac{dx}{x} x^n$ faktorisiert die Gleichung und geht in eine analytisch lösbare Differentialgleichung für die Momente $M_n(Q^2) \equiv \int_0^1 \frac{dx}{x} x^n q(x, Q^2)$ über [26].

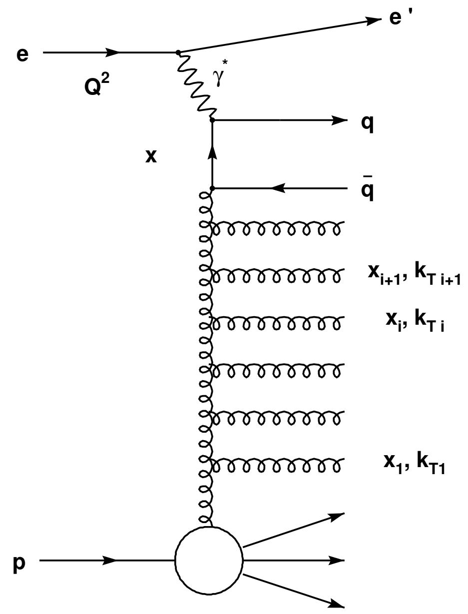

Abb. 1.6: *Leiterdiagramm zur Beschreibung der Q^2-Entwicklung der Gluondichteverteilung im Proton. Die gluon-initiierte Partonkaskade entsteht durch sukzessive Abstrahlung von Gluonen mit longitudinalem Impulsanteil x_i und Transversalimpuls $\sqrt{k_{T,i}^2}$.*

begrenzt (Abbildung 1.7). In den neuen kinematischen Regionen, die mit HERA erschlossen werden, ist noch offen, ob der Gültigkeitsbereich der GLAP-Gleichungen verlassen wird. Insbesondere bei sehr kleinen x ($x < 10^{-3}$) sind die Terme $\alpha_s(Q^2)\log(1/x)$ in der Größenordnung von Eins und nicht mehr vernachlässigbar [28].

Die GLAP-Gleichungen in der nächst höheren Ordnung in α_s (*next-to-leading order*, NLO) erhält man aus den Gleichungen 1.28 und 1.29, indem die LO-Verzweigungsfunktionen durch die entsprechenden NLO-Ausdrücke ersetzt werden. Dadurch ist das strenge Ordnungsschema für die Transversalimpulse $k_{T,i}$ sukzessiver Partonemissionen in einer Leitersprosse aufgehoben, das in der nächst höheren Ordnung α_s zusätzlich auftretende Parton bricht die k_T-Ordnung seiner Nachbarn. Die NLO GLAP-Gleichungen beschreiben eine störungstheoretische Entwicklung der Partondichten nach führenden Logarithmen der Form $\alpha_s^n \log^n(Q^2/\mu^2)$ und $\alpha_s^n \log^{n-1}(Q^2/\mu^2)$ und definieren die Q^2-Entwicklung von NLO-Partondichten.

1.8 Die BFKL-Gleichung

Die Gleichung von Balitsky, Fadin, Kurajev und Lipatov [29] beschreibt eine störungstheoretische Entwicklung der Partondichten nach Potenzen der Form $[\alpha_s \log(1/x)]^n$ [26]. Durch sie wird das qualitative, asymptotische LO Verhalten von Partondichten bei sehr kleinem x vermittelt. Der Gültigkeitsbereich der BFKL-Gleichung liegt in der $\log \frac{1}{x}$-

$\log Q^2$-Ebene orthogonal zu dem der GLAP-Gleichungen (Abbildung 1.7). Für beide Entwicklungen wird $\alpha_s(Q^2) \ll 1$ verlangt, um die Anwendbarkeit der Störungstheorie sicherzustellen.

Die BFKL-Gleichung ist bisher nur für den Fall einer konstanten Kopplung α_s abgeleitet worden. In differentieller Form kann für die BFKL-Gleichung angesetzt werden [27]

$$\frac{\partial f(x,k_T^2)}{\partial \log(1/x)} = \int_{k_0^2}^{\infty} \frac{dk_T'^2}{k_T'^2}\, \mathcal{K}(k_T, k_T') \cdot f(x, k_T'^2), \tag{1.31}$$

wobei der *Lipatov-Kern* $\mathcal{K}$ eine Art Verzweigungsfunktion darstellt. Für die numerische Lösung der Gleichung mit laufender Kopplung α_s schließt der infrarote Abschneideparameter k_0^2 Regionen mit großem α_s aus. Die Funktion $f(k_T^2, \mu^2)$ ist die unintegrierte Gluonverteilung[16]:

$$xg(x,\mu^2) = \int^{\mu^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2}\, f(x,k_T^2). \tag{1.32}$$

Die integrierte BFKL-Gleichung $f = f_0 + \mathcal{K} \otimes f$ kann über den Ansatz $f = \sum f_n$, $f_{n+1} = \mathcal{K} \otimes f_n$ iterativ gelöst werden[17] [30]. Mit den vereinfachenden Separationen $\mathcal{K}(k_T, k_T') = u(k_T)v(k_T')$ und $f_n(x,k_T^2) = u(k_T)t_n(x)$ wird für $x \to 0$ das Verhalten von f bestimmt durch den größten Eigenwert der Eigenwertgleichung $\mathcal{K} \otimes u = \lambda u$

$$f \sim \exp(\lambda \log \frac{1}{x}) \sim x^{-\lambda} \qquad (\lambda > 0), \tag{1.33}$$

wonach die BFKL-Gleichung ein steiles Ansteigen der Gluonverteilung $xg(x)$ gemäß $x^{-\lambda}$ vorhersagt. Eine analytische Lösung für das führende Verhalten bei kleinen x gelingt nur für festes α_s: $\lambda = (12 \ln 2/\pi)\alpha_s$.

Für laufendes α_s wird durch numerische Rechnungen das singuläre Verhalten mit einem typischen Exponenten $\lambda \sim 0.5$ bestätigt [27].

Bezüglich der Ordnungsschemata für die Impulse ergeben sich durch die Summation der Terme $[\alpha_s \log(1/x)]^n$ im Vergleich zu den GLAP-Gleichungen wichtige Unterschiede:

- Die Transversalimpulse $\sqrt{k_{T,i}^2}$ aufeinanderfolgender Partonemissionen sind ungeordnet [31]. Das in der Kaskade nachfolgende Parton $(i+1)$ kann sowohl einen höheren als auch einen niedrigeren Transversalimpuls als sein Vorgänger (i) besitzen[18] [32].

- Die skalierten Longitudinalimpulse x_i der abgestrahlten Partonen sind streng geordnet: $x_i \gg x_{i+1} \gg \ldots \gg x$.

In Tabelle 1.1 sind abschließend die wesentlichen Unterschiede der Partonevolutionen noch einmal zusammengefaßt.

[16] $f(x, k_T^2, \mu^2)$ ist für kleine x unabhängig von der Skala μ^2.
[17] Die Faltung findet in x und k_T statt.
[18] Man spricht auch von einem *random walk* in k_T.

Partonevolution	GLAP	BFKL
Summation der Terme	$(\alpha_s \log \frac{Q^2}{Q_0^2})^n$	$(\alpha_s \log \frac{1}{x})^n$
Gültigkeitsbereich	$\alpha_s(Q^2) \log \frac{Q^2}{Q_0^2} \simeq 1$ $\alpha_s(Q^2) \log \frac{1}{x} \ll 1$ $\alpha_s(Q^2) \ll 1$	$\alpha_s(Q_0^2) \log \frac{Q^2}{Q_0^2} \ll 1$ $\alpha_s(Q_0^2) \log \frac{1}{x} \simeq 1$ $\alpha_s(Q_0^2) \ll 1$
Transversalimpulse	$k_{T,i} \ll k_{T,i+1} \ll \ldots \ll Q^2$	Keine Ordnung
Longitudinalimpulse	$x_i > x_{i+1} > \ldots > x$	$x_i \gg x_{i+1} \gg \ldots \gg x$

Tab. 1.1: *Eigenschaften der Partonevolutionen GLAP und BFKL. Die strenge Ordnung im Transversalimpuls für GLAP besteht nur in führender Ordnung α_s.*

1.9 Die GLR-Gleichung

Bei kleinen Werten von x steigt die Wahrscheinlichkeit, ein Gluon mit dem Impulsanteil x im Proton zu finden, stark an. Da die Gluondichte über die Strukturfunktion F_2 direkt mit dem totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{tot}^{\gamma p}$ korreliert ist, verletzt für $x \to 0$ das singuläre $x^{-\lambda}$ Lipatov-Verhalten der Gluondichte die sogenannte Unitaritätsgrenze [33].

Die Gleichung von Gribov, Lipatov und Ryskin [34] berücksichtigt die Erwartung, daß mit zunehmender Dichte der Gluonen im Proton die Wahrscheinlichkeit für die Rekombination von Gluonen zunimmt, bis bei einer kritischen Dichte Gluonemissionen und Gluonrekombinationen im Gleichgewicht sind. Derartige Sättigungseffekte würden ein weiteres Ansteigen der Gluondichte verhindern. In Abbildung 1.7 ist die Sättigungsregion schematisch als GLR-Linie eingezeichnet. Formal entsteht die GLR-Gleichung durch Addition eines nichtlinearen Termes zur BFKL-(oder GLAP-)Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \log(1/x)} = \mathcal{K} \otimes f - \mathcal{V} \otimes f^2 \,. \tag{1.34}$$

Die Funktion $\mathcal{V}$ enthält einen Faktor $\sim \alpha_s^2/(k_T^2\, R^2)$. Der Quotient α_s^2/k_T^2 resultiert aus der Gluon-Gluon Wechselwirkung. Der Radius R stellt die Längenskala dar, unterhalb derer Rekombinationseffekte zum Gleichgewichtszustand führen. Je kleiner die transversale Fläche πR^2, auf der die Gluonen innerhalb des Protons konzentriert sind, desto stärker der Effekt der Rekombination. Die Messung von Sättigungseffekten und damit von R liefert eine Aussage über die Konzentration der Gluonen im Proton. Zwei Szenarien werden diskutiert:

- R $\simeq 5\,\mathrm{GeV}^{-1}$: Die Gluonen sind homogen im Proton verteilt, ein deutlicher Sättigungseffekt findet erst bei sehr kleinen Werten von x statt.

- R $\simeq 2\,\mathrm{GeV}^{-1}$: Die Gluonen konzentrieren sich in sogenannten *hot-spots* um die Valenzquarks herum [35]. Ein Rekombinationseffekt könnte schon bei größeren Werten von x beobachtbar sein.

Ob Rekombinationseffekte bei HERA gemessen werden können, ist unklar. Neuere Untersuchungen [36] zeigen, daß sie im HERA-relevanten Bereich als sehr klein angenommen werden können.

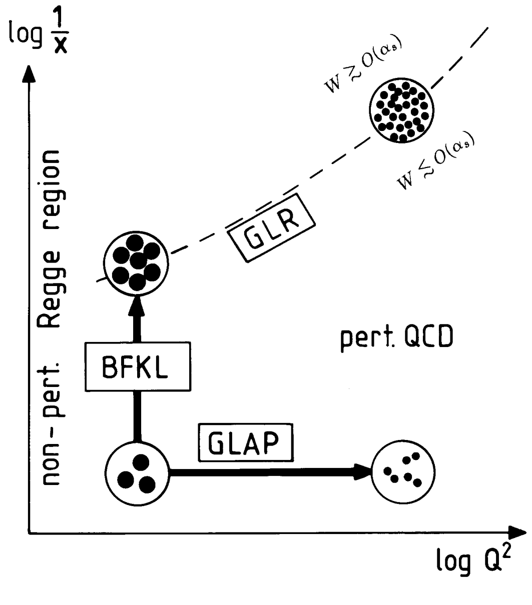

Abb. 1.7: *GLAP- und BFKL-Evolutionen in der kinematischen Ebene. Anschaulich gesprochen entspricht die Q^2 -Entwicklung der Auflösung zunehmend kleinerer Strukturen im untersuchten Objekt, wohingegen bei der $\frac{1}{x}$-Entwicklung die Anzahl gleichgroßer Konstituenten zunimmt. Die Region, in der Sättigungseffekte nach der GLR-Gleichung berechnet werden können, liegt unterhalb der gestrichelten Linie ($W \simeq O(\alpha_s)$). Die Abbildung ist [39] entnommen.*

1.10 Parametrisierung von Partondichten

Für die Q^2-Entwicklung von Partondichten $\Phi(x, Q^2)$ ($\Phi = q, g$) mittels der GLAP-Gleichungen muß die x-Abhängigkeit der Anfangsverteilung $\Phi(x, Q_0^2)$ bei einer Skala Q_0^2 vorgegeben werden. Q_0^2 ist dabei so gewählt, daß die störungstheoretische Entwicklung in Q^2 mit Hilfe der GLAP-Gleichungen möglich ist. Durch die Evolution der Ansatzes zu beliebigen Q^2 und Anpassung der Strukturfunktionen an vorhandene experimentelle Daten können geeignete Parametrisierungen der Partondichten gefunden werden.

Seit 1977 wurden sehr viele verschiedene Sätze von Partondichte-Parametrisierungen entwickelt. Partonverteilungen wurden von Experimenten mit ruhenden Zielkernen wie BCDMS und NMC [22] nur bis zu $x \simeq 10^{-2}$ gemessen. Mittels der ersten Strukturfunktionsmessungen bei HERA in den Jahren 1992 und 1993 [37, 38] konnte dieser limitierte

x-Bereich auf Werte bis $x \simeq 10^{-4}$ ausgedehnt werden. Diese Messungen offenbarten einen steilen Anstieg von F_2 mit abnehmendem x, was den meisten der entwickelten Parametrisierungen die Daseinsberechtigung entzog.

Ein Beispiel für verschiedene Parametrisierungen zeigt Abbildung 1.8. Für $Q^2 = 15$ GeV^2 wird die von den Experimenten H1 und Zeus gemessene F_2-Strukturfunktion mit drei exemplarischen Parametrisierungen verglichen [39].

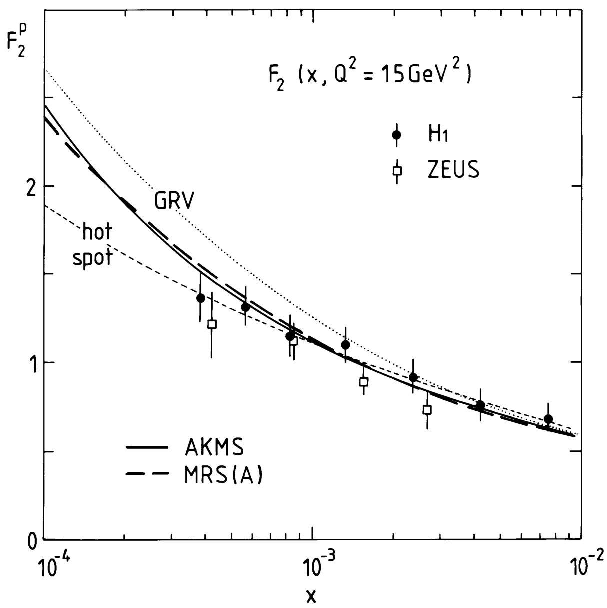

Abb. 1.8: *Verschiedene F_2-Parametrisierungen für festes $Q^2 = 15$ GeV^2. Die gestrichelte Linie (hot spot) zeigt den Verlauf von F_2 für erwartete Gluon-Rekombinationseffekte. Die Abbildung ist [39] entnommen. Dargestellt sind ältere Parametrisierungen aus dem Jahre 1993.*

Die MRS-Parametrisierung[19] [40] wählt für den Anfangspunkt $Q_0^2 = 4$ GeV^2. Der GRV-Ansatz[20] [41] hingegen entwickelt auf Basis der GLAP-Gleichungen ab einer Skala $Q_0^2 = 0.3$ GeV^2. Der Erfolg der QCD-Störungstheorie besteht in der Übereinstimmung der in dem großen Bereich $1,5 < Q^2 < 5000$ GeV^2 gemessenen Strukturfunktion $F_2(x, Q^2)$ mit der QCD-Rechnung als Funktion von Q^2 [42]. Die x-Abhängigkeit der gemessenen und in Q^2 entwickelten Partondichten wird mit zunehmendem Q^2 steiler.

Die AKMS-Parametrisierung[21] [43] basiert auf der BFKL-Entwicklungsgleichung. Die Anfangsverteilung wird aus dem Verhalten von F_2 bei großen x gewonnen ($x_0 \simeq 10^{-2}$)

[19] Nach Martin, Roberts, Stirling.
[20] Nach Glück, Reya, Vogt.
[21] Nach Askew, Kwieciński, Martin, Sutton.

und für festes Q^2 zu kleinen Werten von x entwickelt. Die Entwicklung ist konsistent mit dem gemessenen Anstieg von F_2 bei kleinen x.

Es ist unklar, ob für diesen Anstieg das Lipatov-Verhalten der Gluondichte verantwortlich gemacht werden kann. Über den Prozeß $g \to q\bar{q}$ wird der Anstieg der Gluondichte auf die Quarkdichten, die in F_2 eingehen, übertragen. Die Messung der Strukturfunktion F_2 in einem Bereich bis zu $x \simeq 10^{-5}$ bestätigt die erfolgreiche Beschreibung der Daten durch die QCD-Störungstheorie auf Basis der GLAP-Entwicklung. Dies ist umso erstaunlicher, als die Forderung $\alpha_s(Q^2) \log \frac{1}{x} \ll 1$ (Gleichung 1.30) für derart kleine Werte von x nicht mehr erfüllt ist. Auch das Einsetzen der in Kapitel 1.8 besprochenen Sättigungstendenzen ist bisher nicht ersichtlich [42].

1.11 Der transversale Energiefluß

Die Bestimmung von F_2 durch inklusive Messung des Wirkungsquerschnittes und die Notwendigkeit, Anfangsverteilungen für die Partondichten anzusetzen, die nicht aus der QCD abgeleitet werden können, macht die Hoffnung zunichte, der beobachtete Anstieg von F_2 bei kleinen x könne für die Diskriminierung zwischen der GLAP- und BFKL-Partondynamik verwendet werden. Es wurde mehrfach vorgeschlagen, zu diesem Zweck die Eigenschaften des hadronischen Endzustandes X der tiefunelastischen Streuung (Abbildung 1.1) zu untersuchen [44, 45, 46]. Eine relevante Observable, die im folgenden mit *transversaler Energiefluß* bezeichnet wird, ist die transversale Energie der Endzustandsteilchen als Funktion der Rapidität oder Pseudorapidität. Die transversale Energie $E_{T,i}$ und die Rapidität ζ_i eines Teilchens i mit dem Vierervektor (E, p_x, p_y, p_z)[22] sind definiert als

$$E_{T,i} = E\,\frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{p}, \qquad (1.35)$$

$$\zeta_i = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E + p_z}{E - p_z}\right). \qquad (1.36)$$

Die Pseudorapidität η_i, die sich aus der Rapidität ζ_i bei Vernachlässigung der Teilchenmasse ergibt, kann vereinfachend durch den Streuwinkel θ zwischen der Richtung des einlaufenden Protons und der Flugrichtung des Teilchens ausgedrückt werden

$$\eta_i = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p + p_z}{p - p_z}\right) = -\ln\tan\left(\frac{\theta}{2}\right). \qquad (1.37)$$

Rapidität und Pseudorapidität eines Teilchens sind zwar keine Lorentzinvarianten, jedoch verschieben sie sich bei Transformationen in z-Richtung lediglich um eine additive Konstante.

[22] E, p_x, p_y, p_z bezeichnen Energie, x-, y-, z-Komponente des Impulses. Für den Impuls p des Teilchens gilt $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{p_T^2 + p_L^2}$ mit $p_T^2 = p_x^2 + p_y^2$.

Die Messung des transversalen Energieflusses bei HERA wurde von der H1-Kollaboration erstmals in [47] veröffentlicht[23]. Abbildung 1.9 zeigt für zwei Bereiche von x den von H1 gemessenen und auf Detektoreffekte korrigierten, transversalen Energiefluß als Funktion der Pseudorapidität η. $\frac{1}{N}\frac{dE_T}{d\eta}$ ist der auf die Anzahl N der Ereignisse normierte, transversale Energiefluß der Hadronen pro Einheit der Pseudorapidität.

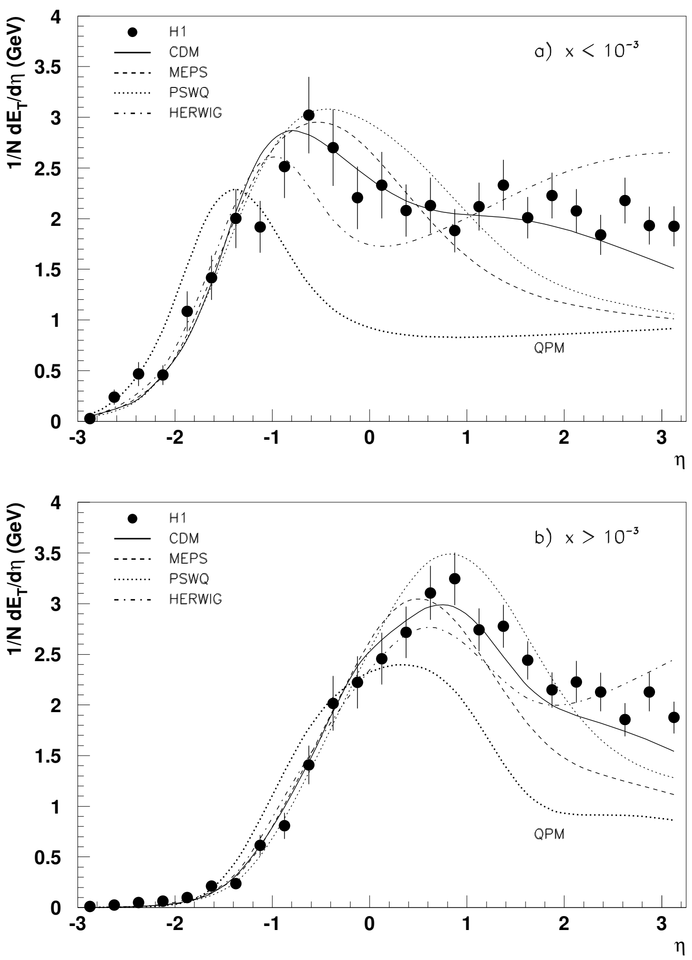

Abb. 1.9: *Der transversale Energiefluß im Laborsystem für die Bereiche $x < 10^{-3}$ und $x > 10^{-3}$ [49]. Die Richtung des Protonstrahls zeigt nach rechts in Richtung positiver Pseudorapidität η.*

[23]ZEUS veröffentlichte wenig später ebenfalls erste, allerdings nicht auf Detektoreffekte korrigierte, Resultate [48].

Die Daten zeigen, vor allem für $x < 10^{-3}$, in der η-Region ($\eta > 1,5$) zwischen dem Jet des gestreuten Quarks und dem Protonrest, der mit dem H1-Detektor nicht gemessen werden kann, ein höheres E_T-Plateau als die auf der GLAP-Dynamik basierenden QCD-Modelle MEPS und PSWQ, die in Kapitel 3.2.1 näher erläutert werden.

Diese Beobachtung gab Anlaß, den generellen BFKL-Formalismus für die Beschreibung des transversalen Energieflusses bei kleinen x anzuwenden [39]. Die Abwesenheit der strengen Ordnung in k_T entlang der Gluonleiter, eines der Charakteristika der BFKL-Dynamik, hat zur Folge, daß im Mittel in der zentralen Region mehr transversale Energie E_T erwartet wird als im Falle der GLAP-Dynamik. In [39] wurde für festes α_s eine analytische Form für den transversalen Energiefluß $x_j \frac{\partial E_T}{\partial x_j}$ abgeleitet, wobei x_j den longitudinalen Impulsbruchteil des j-ten abgestrahlten Gluons in Abbildung 1.6 bezeichnet. Darüber hinaus wurden mit laufender Kopplung $\alpha_s(Q^2)$ numerische Rechnungen für die Werte $x = 10^{-8}, 10^{-7}, \ldots 10^{-4}$ bei festem $Q^2 = 10$ GeV^2 durchgeführt. Die an die Rechnung gestellten Randbedingungen lauteten $x_j < 10^{-2}$ und $x/x_j < 10^{-1}$.

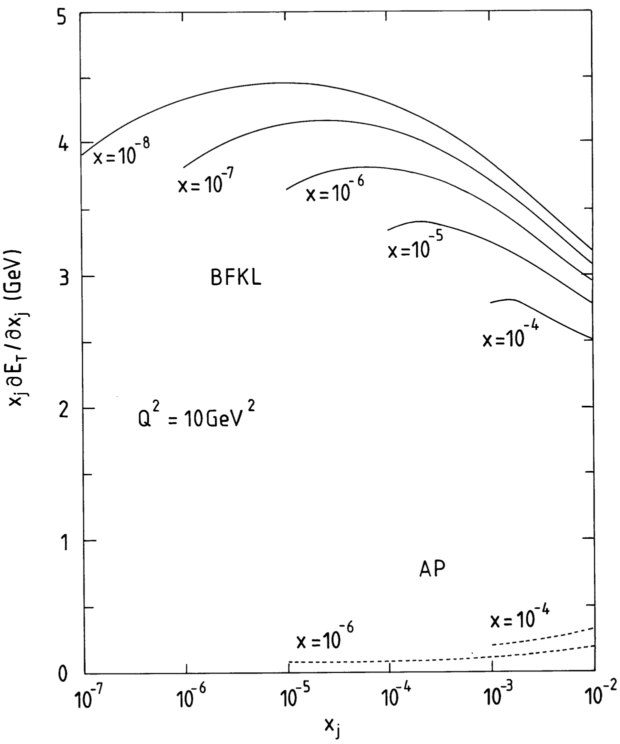

Abb. 1.10: *Berechnete E_T-Verteilungen als Funktion von x_j für $Q^2 = 10$ GeV^2 und verschiedene Werte von x [39]. x_j bezeichnet den longitudinalen Impulsbruchteil des j-ten Gluons in Abbildung 1.6.*

Die numerischen Resultate sind in Abbildung 1.10 dargestellt. Die E_T-Verteilung als Funktion von x_j zeigt eine breite Gauß-Kurve, deren Breite und Höhe mit abnehmendem x zunimmt (BFKL). Ebenfalls eingezeichnet ist für zwei Werte von x die E_T-Verteilung, die sich aus Anwendung der GLAP-Evolution (AP) ergibt. Erwartet wird, im Unterschied zur BFKL-Vorhersage, ein sehr viel niedrigeres und mit abnehmendem x in der Höhe abnehmendes E_T-Plateau.

Die Protonrichtung zeigt nach links zu kleinen Werten von x_j. Da die longitudinalen Impulsbruchteile x_j für sukzessive Emissionen streng geordnet sind (vergl. Tabelle 1.1), kann x_j für gegebenes x und Q^2 direkt in die Pseudorapidität $\eta^\star$ im Photon-Proton-Schwerpunktsystem (*center of mass system*, CMS) transformiert werden gemäß $\eta^\star = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x_j^2 Q^2}{x k_j^2}\right)$, wobei k_j den Transversalimpuls des j-ten Gluons bezeichnet.

Im Photon-Proton-Schwerpunktsystem befindet sich die Region zwischen dem Jet des gestreuten Quarks und dem Protonrest bei $\eta^\star \approx 0$, weshalb sie auch *zentrale Region* genannt wird. Durch die limitierte Detektorakzeptanz ist dem Experiment von der gezeigten x_j-Skala nur der kleine Bereich $x_j > 5 \cdot 10^{-3}$ zugänglich, was für $Q^2 = 10$ GeV^2 einer Pseudorapidität im Photon-Proton-Schwerpunktsystem von $-0.5 < \eta^\star$ entspricht.

1.12 Motivation der Messung

In Abbildung 1.11 wird der gemessene Energiefluß der Abbildung 1.9 a) ($x < 10^{-3}$) für $\eta > 1$ mit der BFKL-Vorhersage konfrontiert [50].

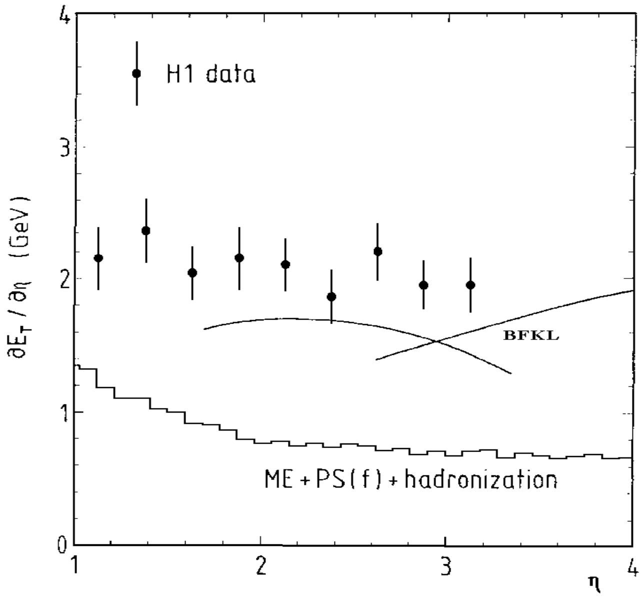

Abb. 1.11: *Transversaler Energiefluß in Vorwärtsrichtung des Laborsystems für ein mittleres $x = 5,7 \cdot 10^{-4}$ und $Q^2 = 15$ GeV^2 im Vergleich mit der BFKL-Vorhersage [50].*

Die BFKL-Rechnung wurde den Daten entsprechend für ein mittleres $x = 5,7 \cdot 10^{-4}$ und $Q^2 = 15$ GeV^2 im CMS durchgeführt. Die ins Laborsystem transformierten Resultate sind als zwei durchgezogene Kurven eingezeichnet (BFKL), die sich bei $\eta \approx 3$ schneiden. Die linke Kurve liegt etwas unterhalb der Vorhersage für $x = 10^{-4}$ in Abbildung 1.10. Sie basiert auf der sogenannten *Doppel-BFKL-Schleife*. Ausgehend von einem in der zentralen Region zwischen gestreutem Quark und Protonrest abgestrahlten Gluon, das die Leiter in Abbildung 1.6 in eine obere und eine untere Hälfte aufteilt, liegt die BFKL-Entwicklung sowohl der Integration über die obere als auch die untere Leiterhälfte zugrunde. Um zu größeren η zu gelangen ($x_j > 10^{-2}$), wird in der *Einzel-BFKL-Schleife* die Entwicklung der unteren Leiterhälfte nach den GLAP-Gleichungen durchgeführt. Das Ergebnis zeigt die rechte Kurve (BFKL).

Zu beachten ist, daß weder Gluonabstrahlungen vom gestreuten Quark, noch nicht-perturbative Effekte der Hadronisation in der BFKL-Rechnung berücksichtigt sind. Die Gluonabstrahlung vom gestreuten Quark sollte allerdings nur einen geringen Einfluß auf die zentrale Region haben. Zusätzliche Energiebeiträge durch Hadronisierungseffekte können über QCD Monte-Carlo-Simulationen abgeschätzt werden (vergl. Kapitel 3). In Abbildung 1.11 ebenfalls eingezeichnet ist die auf der GLAP-Dynamik beruhende Vorhersage des QCD-Modells *ME+PS(f)+hadronization* für die genannten Effekte (vergl. Kapitel 3.2.1). Die einfache Addition eines zusätzlichen Energiebeitrages aus der Hadronisation mag zu naiv erscheinen, trotzdem liefert sie einen ersten Anhaltspunkt für die Interpretation der Messung, die bei kleinen x einen beträchtlichen Energiefluß in der zentralen Region aufweist. Das beobachtete Energieplateau in Abbildung 1.9 a) für $\eta > 2$ liegt signifikant höher als nach der konventionellen GLAP-Dynamik erwartet.

Die Aufhebung der strengen Ordnung der Gluontransversalimpulse in der BFKL-Entwicklung führt im Mittel zu höheren Teilchenenergien im Endzustand als in der GLAP-Entwicklung. Zudem zeigt Abbildung 1.10, daß dieser Effekt bei zunehmend kleineren x noch an Bedeutung gewinnt, so daß im Gegensatz zur GLAP-Vorhersage mit abnehmendem x zunehmende Transversalenergie erwartet wird.

Die Messung des transversalen Energieflusses $\frac{dE_T}{d\eta}$ und der mittleren Transversalenergie $\langle E_T \rangle$ in der zentralen Region $(-0,5 < \eta^\star < 0,5)$ als Funktion von x gibt womöglich ein Instrument an die Hand, Anwendbarkeit und Gültigkeitsbereich der Partonevolutionen nach BFKL und GLAP zu überprüfen. Von besonderer Bedeutung ist hierbei der mit dem Speicherring HERA zugängliche kinematische Bereich sehr kleiner x.

Kapitel 2

Das H1-Experiment

Die **H**adron-**E**lektron-**R**ing-**A**nlage HERA des Deutschen Elektronen-Synchrotrons DESY in Hamburg ist der weltweit erste Speicherring, in dem Elektronen und Protonen zur Kollision gebracht werden. Das H1-Experiment ist in der nördlichen von insgesamt vier vorhandenen Wechselwirkungszonen aufgebaut. Aufgabe des H1-Detektors ist die Identifikation und Vermessung der Teilchen des Endzustandes von ep-Wechselwirkungen. In diesem Kapitel wird ein Überblick über die wichtigsten HERA-Parameter sowie die verwendeten Komponenten des Detektors gegeben.

2.1 Der Speicherring HERA

In HERA werden Elektron- und Protonstrahlen in zwei separaten Speicherringen, die in einem 6,3 km langen Tunnel übereinander angeordnet sind, beschleunigt, gespeichert und zur Kollision gebracht werden. Nach sechsjähriger Bauzeit und Inbetriebnahme im Jahr 1991 wurden die ersten Elektron-Proton-Kollisionen im Mai 1992 von den beiden Experimenten H1 [51] und ZEUS [52] nachgewiesen.

Abbildung 2.1 gibt eine schematische Übersicht über die komplette Anlage. Eine Kette von 7 Vorbeschleunigern versorgt den Speicherring HERA mit Elektronen bzw. Positronen und Protonen der erforderlichen Anfangsenergie. Es sind dies die 3 Linearbeschleuniger LINAC I, II, III, der Akkumulations-Speicherring PIA und die 3 Kreisbeschleuniger DESY II, III und PETRA II [56] (Tabelle 2.1). Die nominellen HERA-Strahlenergien betragen für die Elektronen 30 GeV und für die Protonen 820 GeV.

Die große technische Herausforderung bei Konzeption und Realisierung der Speicherringanlage HERA war der Einsatz der Supraleitungstechnologie. Der Elektronenring ist mit 16 supraleitenden Resonatoren[1] ausgerüstet, um Energieverluste durch Synchrotronstrahlung auszugleichen. Die Elektronen emittieren auf ihrer gekrümmten Bahn wie jede beschleunigte Ladung elektromagnetische Strahlung. Für die einem Elektron dadurch pro Umlauf verlorengehende Energie ΔE gilt $\Delta E = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2\,\beta^2\,E^4}{R\,m_e^4}$ wobei E, m_e, β und R Strahlenergie, Masse, Geschwindigkeit und Krümmungsradius des Elektrons bedeuten [57].

[1] Die supraleitenden Elektronresonatoren werden mit 500 MHz, die normalleitenden Protonresonatoren mit 208 MHz betrieben.