Table des matières

Introduction

L'étude des interactions fortes a profondément changé depuis les années soixante. La structure en quarks des hadrons est en effet passée du stade de l'hypothèse atomique de la chimie du siècle passé à celui de la théorie atomique de l'atome de Bohr. L'identification possible entre le concept de quark (permettant d'interpréter les propriétés de symétrie des hadrons) et le concept de parton (permettant d'interpréter les collisions sur diffuseurs quasi-ponctuels apparaissant dans l'étude des collisions lepton-hadron à grands transferts d'impulsion) a représenté un progrès majeur. L'activité expérimentale s'est rapidement concentrée sur l'analyse des phénomènes où l'on peut étudier une réaction au niveau des quarks et non plus au niveau global du hadron, mettant ainsi directement à jour ce nouveau niveau de structure. On distingue par exemple :

- les collisions lepton-hadron à grands transferts d'impulsion ($Q^2 > 1$ GeV ^{2}) ;
- les annihilations e^+e^- à grande énergie ($E > 1$ GeV) ;
- la production de paires de leptons de grande masse dans les collisions hadroniques ($M > 1$ GeV) ;
- les phénomènes de production hadronique à grande impulsion transverse ($p_T >$ 1 GeV), ceci incluant les photons directs à grande impulsion transverse.

Le modèle des partons de Feynman a longtemps permis de relier ces phénomènes a priori très distincts, en interprétant ces réactions comme résultant toutes de l'interaction incohérente de constituants quasi-ponctuels des hadrons : les partons ; la condition requise pour l'absence de cohérence correspond à une impulsion transférée grande par rapport à l'énergie propre du système hadronique (~ 1 GeV). L'apparition de mécanismes incohérents à grands transferts lorsqu'une structure sous-jacente existe est en fait un phénomène très naturel dont l'analogie optique est évidente. L'absence de seuil pour l'apparition des éléments de la structure sous-jacente est cependant longtemps restée un problème majeur. Si les expériences précédentes ont permis d'identifier les propriétés des partons à celles avancées indépendamment pour les quarks, la recherche des quarks libres est restée vaine.

C'est alors qu'est apparue la chromodynamique quantique (le nom est dû à Gell-Mann). Cette théorie met en jeu un dégré de liberté interne que l'on appelle la "couleur", les transformations de couleur correspondant à un groupe de symétrie pour les interactions fortes et la fonction d'onde de couleur étant entièrement antisymétrique. Dès lors, les hadrons se comportent comme des singulets du groupe de couleur ($SU(3)$). En particulier, le champ de couleur ne peut pas pénétrer le vide à des distances supérieures à celles caractéristiques des dimensions hadroniques ($r \sim 1fm$). Cette propriété peut être vue comme la conséquence du fait qu'il existe un couplage direct entre les quanta du champ de couleur (les gluons), ce qui est lié au caractère non-abélien de la chromodynamique quantique (QCD).

La constante de couplage effective de cette théorie augmente ainsi à faibles transferts et diminue à grands transferts, ce qui constitue une propriété caractéristique des théories de jauge non-abéliennes, que l'on appelle la liberté asymptotique.

On comprend par exemple comment, à grands transferts, on peut décrire une réaction comme résultant d'une interaction avec des quarks libres : c'est le cas des quatre réactions déjà présentées, alors que les hadrons réagissent de façon globale à faibles transferts, toute idée perturbative semblant alors vouée à l'échec. Cependant, la liberté asymptotique ne suffit pas à permettre un calcul de perturbations, même dans le cadre d'une théorie renormalisable, les problèmes de régularisation infrarouge étant importants. On peut donc distinguer ce qui est calculable et ce qui ne l'est pas, on peut ainsi prédire la variation des fonctions de structure en fonction de Q^2 mais non leurs valeurs. A un niveau moins inclusif, ceci amène à considérer des jets de quarks et gluons et non pas individuellement des quarks et des gluons dans l'état initial et final.

Le travail de thèse que nous présentons s'inscrit dans ce cadre et prolonge les activités expérimentales et théoriques de l'étude des interactions fortes.

Le premier chapitre rappelle quelques éléments essentiels à la compréhension de la physique des particules élémentaires au sein du modèle standard.

Le chapitre 2 se concentre ensuite sur la physique des interactions fortes dans le cadre du collisionneur HERA, qui est un collisionneur électron-proton de grande énergie. Comme nous l'avons indiqué, ce type d'expérience est bien adapté à l'étude de la structure du proton. Dans ce chapitre, nous présentons en particulier le modèle des partons, qui prend, dans la formulation de Feynman, une forme certes heuristique mais particulièrement puissante et simple. Les prédictions de la QCD perturbative étendent les idées de ce modèle et permettent une description plus fine des résultats expérimentaux, par exemple pour ce qui concerne la violation de l'invariance d'échelle. Nous montrons en quoi l'étude de la diffusion inélastique profonde et des fonctions de structure est pertinente pour comprendre la dynamique des interactions fortes dans ses différents régimes d'évolution, ceci constitue ensuite l'essentiel de notre travail de thèse, sur un plan théorique d'une part, et expérimental d'autre part.

Dans *le chapitre 3*, nous présentons ainsi une étude originale du comportement de la fonction de structure du proton $F_2(x, Q^2)$ à bas x. La fonction de structure F_2 présente en effet une propriété singulière qui est sa croissance quand x diminue ; celle-ci peut s'interpréter de diverses manières dans le cadre de la QCD perturbative, les images physiques sous-jacentes à chacune de ces interprétations étant relativement distinctes. Nous montrons comment une discrimination est éventuellement possible, en définissant les outils expérimentaux et phénoménologiques adaptés.

Le chapitre 4 reprend ensuite l'étude de la QCD perturbative de façon plus générale. Nous proposons une résolution numérique des équations maîtresses de la QCD, ce qui permet ensuite de tester la théorie par la procédure dite des ajustements QCD. Les prédictions qui en dérivent sont précises et constituent des vérifications importantes de la QCD perturbative. Dans toutes les études qui précèdent, une grande précision sur les mesures de F_2 est nécessaire ; notre analyse expérimentale s'inscrit dans ce contexte en prolongeant et en améliorant les mesures antérieures effectuées dans l'expérience H1.

Dans *le chapitre 5*, nous présentons le détecteur H1 (au sein du collisionneur HERA) que nous utilisons pour effectuer l'analyse expérimentale des données enregistrées en 1995.

Dans *le chapitre 6*, nous présentons la sélection et la reconstruction des événements de diffusion inélastique profonde. Nous développons une analyse détaillée des calibrations du nouveau calorimètre arrière (le SPACAL), les performances du trajectographe arrière (la BDC) sont également analysées précisément ; une bonne maîtrise de ces deux sous-détecteurs est essentielle pour mener à bien une analyse de grande précision. Le contrôle des bruits de fond au signal de diffusion inélastique profonde, en particulier celui de photoproduction, est aussi un élément important de notre étude.

Les résultats de notre analyse sont ensuite présentés *au chapitre 7*, où nous explicitons l'ensemble des étapes de la mesure de F_2. Les mesures que nous proposons sont ensuite comparées aux prédictions théoriques et une nouvelle étude de la QCD perturbative est présentée en incluant nos nouvelles données.

En conclusion, les éléments importants de notre travail sont rappelés et situés dans le contexte de l'étude des interactions fortes et de l'ensemble des activités expérimentales concernées par cette discipline. Cette partie est l'occasion de définir les perspectives qui apparaissent alors pour la compréhension de la physique subnucléaire.

Chapitre 1

LE MODELE STANDARD

Qu'est ce que le Modèle Standard? La sémantique nous fournit déjà quelques renseignements. Il s'agit d'un modèle, donc d'une vue de l'esprit théorique, qui vaut par sa rigueur mathématique et sa cohérence avec les données de l'expérience. De plus, il est dit standard car c'est une version de référence communément admise par les physiciens et qui a fait preuve de ses qualités à de nombreuses reprises.

Nous présentons en introduction les principaux attributs de ce modèle et établissons ainsi un statut sommaire de la physique des particules. Ensuite, nous nous intéressons à une description plus formelle de ce statut en utilisant le langage de la théorie des groupes qui implique *naturellement* un classement des particules élémentaires et de leurs interactions. Les résultats des tests expérimentaux de ce modèle sont remarquables comme nous le montrons dans ce chapitre et dans les chapitres ultérieurs. Cependant, il en va de l'évolution de la théorie de chercher au-delà et de considérer les extensions possibles de cette construction. Nous en présentons quelques éléments ici.

1.1 Présentation générale

Selon le Modèle Standard (MS), les particules qui constituent la matière se répartissent en 3 familles similaires, chacune composée d'une paire de leptons (comme l'électron et son neutrino) et d'une paire de quarks (comme les quarks u et d qui composent le proton et le neutron), et de leurs anti-particules. Les 6 leptons (électron, muon, tau et leurs 3 neutrinos associés) ainsi que les 6 quarks (u,d,s,c,b,t) ont été observés -excepté le neutrino tau- assurant au MS une solide base expérimentale. Ces particules sont soumises à 4 types d'interactions :

- *l'interaction gravitationnelle* à laquelle toutes les particules massives sont soumises et qui est généralement négligeable en physique des hautes énergies ;
- *l'interaction électromagnétique* qui ne relie que les particules chargées, elle concerne donc les leptons (électron, muon, tau) qui ont une charge -1, les quarks (u,c, t) de charge 2/3 et les quarks (d,s,b) de charge -1/3, cette interaction n'affecte pas les neutrinos qui sont de charge électrique nulle ;
- *l'interaction faible* qui relie les particules de chaque paire (l'électron à son neutrino, un quark u à un quark d, etc.) ;

- *l'interaction forte* qui ne concerne que les quarks, et les particules qui en sont composées, les hadrons. Par exemple, le proton qui est formé de 2 quarks u et un quark d (d'où une charge électrique +1) et le neutron formé de deux quarks d et un quark u (charge électrique nulle). Chacun des 6 quarks existe en 3 variétés, qu'on appelle *couleurs*: ainsi il y 3 quarks u (*rouge, bleu, vert*), 3 quarks d, etc. Les anti-quarks étant anti-colorés ;

Toutes les interactions - électromagnétique, faible et forte - se décrivent aujourd'hui dans le même cadre mathématique : celui des théories de jauge. C'est là le grand progrès des années 1960 et 1970 pendant lesquelles les physiciens ont mis en évidence un cadre théorique unifiant toutes les données expérimentales, ce qui justifie actuellement une démarche similaire pour la recherche d'une théorie ultime.

Dans une théorie de jauge les interactions sont la conséquence automatique d'une symétrie associant certaines particules, par exemple les trois couleurs d'un quark u, ou une paire électron-neutrino. Cette symétrie signifie que les particules sont semblables au point de pouvoir se transformer l'une en l'autre. De plus, quand une telle transformation a lieu, un signal est émis sous la forme d'une autre particule, qu'on appelle boson de jauge et qui emporte en général de l'énergie. Par exemple, quand un électron se transforme en neutrino, il émet un boson W^- comme signal ; quand ce W^- est reçu par une autre particule, il la transforme à son tour : un quark u devient ainsi un quark d : la réaction globale peut donc s'écrire $e^- + u \to \nu_{e^-} + d$. De plus, toutes les interactions sont véhiculées par des bosons de jauge, le photon pour l'électrodynamique, les bosons W^-, W^+, Z_0 pour l'interaction faible, et 8 gluons pour l'interaction forte. L'étude de l'interaction forte est compliquée par le fait que l'intensité de l'interaction augmente considérablement à grande distance, ce qui a pour effet d'interdire à une particule *colorée* (quark ou gluon) de s'éloigner des autres : ainsi, on n'a jamais observé de quark ou de gluon libres. Cependant, les combinaisons *incolores* sont permises, telles que les baryons (3 quarks un de chaque couleur) ou les mésons (un quark et un antiquark de couleurs opposées).

L'interaction faible a longtemps posé de graves problèmes car la symétrie de jauge correspondante est brisée : les particules qu'elle relie ont des masses et des charges électriques différentes, et les bosons de jauges W^-, W^+, Z_0 ont également une masse, à la différence du photon ou des gluons. Pour briser une symétrie de jauge sans rendre la théorie mathématiquement incohérente, le MS utilise encore une nouvelle particule - le boson de Higgs - en lui attribuant une nouvelle interaction *ad hoc*. Plus exactement, la symétrie brisée est une symétrie encore plus grande, la symétrie électrofaible réunissant les symétries de jauge de l'électrodynamique et de l'interaction faible, et la brisure de cette symétrie électrofaible laisse subsister une symétrie résiduelle, celle de l'électrodynamique. La conséquence de cette unification est que le Z_0 contient un petit bout d'électrodynamique et le photon un petit bout d'interaction faible.

1.2 Groupes et particules

Nous avons déjà souligné que le MS est une théorie de jauge, ainsi il trouve une expression naturelle dans le langage des théories de groupe [1]. Nous allons développer brièvement ce dernier point dans les paragraphes qui suivent.

Le Modèle Standard (MS) est en fait une théorie de jauge renormalisable qui repose sur le groupe $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Cette structure algébrique sous-tend le classement des particules élémentaires du MS.
Pour les particules de matière (fermions), on distingue :

- les leptons, qui sont regroupés en trois familles. La première famille contient l'électron et son neutrino associé (e, ν_e), la seconde (μ, ν_μ) et la troisième (τ, ν_τ) ;
- les quarks, qui eux aussi sont groupés en trois générations (u, d), (c, s) et (t, b). Les quarks sont les constituants de base de la matière hadronique (par exemple du proton et du neutron) ;

Le MS décrit alors les interactions électromagnétique, faible et forte entre ces particules. Les deux premières interactions sont décrites de manière unifiée : c'est la théorie électrofaible de Glashow-Salam-Weinberg [2], qui repose sur le groupe de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Ce groupe est celui des transformations laissant invariant le Lagrangien des interactions faibles. Le groupe $SU(3)_c$ est le groupe de jauge de la théorie décrivant les interactions fortes, la ChromoDynamique Quantique (QCD, pour Quantum Chromo Dynamics). Les interactions entre particules de matière sont véhiculées par les bosons de jauge (de spin 1), qui sont :

- le photon, de masse nulle, pour l'interaction électromagnétique ;
- les bosons massifs $W^\pm$ et Z^0 pour l'interaction faible ;
- les huit gluons de masse nulle pour l'interaction forte ;

Quelques remarques concernant $SU(2)_L \times U(1)_Y$

La violation de la parité dans les interactions faibles implique que les composantes de chiralité droite et gauche des fermions sont traitées différemment dans la théorie. Les composantes gauches des leptons appartiennent à des doublets d'isospin du groupe $SU(2)_L$:

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$$

et les composantes droites à des singlets (c'est-à-dire une transformation de $SU(2)_L$ laisse invariantes ces composantes droites) :

$$e_R, \mu_R, \tau_R, u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R$$

Les neutrinos, supposés de masse nulle dans le MS, ne sont représentés que par des états de chiralité gauche.

De plus, comme on l'a déjà noté précédemment, la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ est brisée. En effet, tant que la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ est exacte, les fermions sont de masse nulle (un terme de masse $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_L \psi_R$ n'est pas invariant sous $SU(2)_L$), de même pour les bosons de jauge. C'est le mécanisme de Higgs qui génère les masses des particules dans le MS. Pour cela, on suppose l'existence d'un champ scalaire H, neutre électromagnétiquement et appartenant à un doublet de $SU(2)_L$, qui se couple aux bosons de jauge et aux fermions (ces derniers couplages sont appelés couplages de Yukawa). Le potentiel scalaire du MS est choisi de telle sorte qu'au minimum, H prenne une valeur moyenne non nulle dans le vide ($v =< H >\simeq 250$ GeV). La symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ se brise alors spontanément en $U(1)_{em}$ et les particules acquièrent une masse.

Quelques remarques concernant $SU(3)_c$

Les quarks, quant à eux, appartiennent à des triplets de $SU(3)_c$, chaque type (ou saveur) de quark pouvant porter trois couleurs (rouge, bleu, vert). Les leptons, au contraire, qui sont des objets non colorés, se comportent comme des singlets sous une transformation de $SU(3)_c$ et les gluons appartiennent à des octets de $SU(3)_c$.

Les particules du Modèle Standard

Les tableaux 1.1 et 1.2 reprennent les propriétés des particules décrites par le Modèle Standard, pour les fermions (qui constituent la matière) ainsi que pour les bosons (vecteurs des interactions).

Fermions			Q	T_3	Y
$\begin{pmatrix}\nu_e \\ e\end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix}\nu_\mu \\ \mu\end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix}\nu_\tau \\ \tau\end{pmatrix}_L$	0 -1	1/2 $-1/2$	-1 -1
e_R	μ_R	τ_R	-1	0	-2
$\begin{pmatrix}u \\ d\end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix}c \\ s\end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix}t \\ b\end{pmatrix}_L$	2/3 $-1/3$	1/2 $-1/2$	1/3 1/3
u_R	c_R	t_R	2/3	0	4/3
d_R	s_R	b_R	$-1/3$	0	$-2/3$

TAB. 1.1 – *Les fermions du Modèle Standard et leurs principales caractéristiques.* Y *(l'hypercharge) est le générateur du groupe* $U(1)$ *et* T_3 *est la troisième composante de l'isospin faible* $\vec{T} = \vec{\tau}/2$ *générateur de* $SU(2)$*. La charge électrique* Q *vérifie :* $Q = T_3 + Y/2$.

1.3 Les interactions faible et forte

Les constantes de couplage g de l'interaction faible et g' de l'interaction électromagnétique sont des fonctions décroissantes avec la distance et sont reliées par l'angle de Weinberg θ_W : $\tan\theta_W = g'/g$.

La mesure de cet angle donne : $\sin^2\theta_W = 0.2319 \pm 0.0005 \pm 0.0002$ [3].

L'interaction forte au contraire voit son intensité (notée α_S) augmenter avec la distance. A faible distance, les quarks peuvent être considérés comme des particules

Bosons	spin	Q	masse (GeV)
gluons g_i $(i = 1..8)$	1	0	0
photon γ	1	0	0
$W^{\pm}$	1	± 1	80.2
Z^0	1	0	91.2
Higgs H	0	0	≥ 77

TAB. 1.2 – *Les bosons du Modèle Standard. Pour le boson de Higgs, on a donné la limite inférieure à 95% de confiance [3].*

libres (on parle de liberté asymptotique). Au contraire, lorsque la distance entre deux quarks q_1 et q_2 augmente, l'énergie d'interaction devient de plus en plus grande, de telle sorte que des paires quark-antiquark sont créées à partir du vide. Alors q_1 et q_2 ne sont pas observés individuellement mais forment des objets non colorés (les hadrons) : c'est la propriété dite du confinement [4].

1.4 Tests du Modèle Standard

Le modèle standard électrofaible est très bien vérifié par les expériences. Comme exemple, on peut rappeler que les bosons W^-, W^+, Z_0 ont été observés en 1983 au CERN et que la précision des mesures du LEP assure qu'il n'y a pas plus de 3 neutrinos légers (en accord avec les prédictions de la cosmologie) et donc pas de quatrième famille. De même, la découverte du quark top (t) à Fermilab en 1995 [5] est un grand succès du MS. Seul le boson de Higgs, qui constitue la pierre angulaire du modèle, n'a pas encore été mis en évidence : il s'agit d'un enjeu expérimental important pour le LHC ("Large Hadron Collider") [6].

Quant à la ChromoDynamique Quantique (QCD), elle ne peut être testée que dans des processus à courte distance, là où la constante de couplage α_S est suffisamment faible pour permettre des calculs perturbatifs [7]. Ces tests de QCD constituent un domaine d'activité privilégié à HERA. Nous y reviendrons plus en détail dans les chapitres qui suivent.

1.5 Extensions possibles

Le MS unifie les trois interactions fondamentales de la physique des hautes énergies (électromagnétique, faible et forte), la gravitation restant à part. Dès lors, on peut se demander s'il est possible d'aller au-delà et de concevoir une théorie unifiant toutes les interactions (sans mécanisme *ad hoc*). L'expérience laisse à penser que le Modèle Standard décrit bien la physique aux énergies accessibles aujourd'hui dans les accélérateurs, de l'ordre de la centaine de GeV . Néanmoins, ce modèle souffre de quelques faiblesses et il pourrait n'être que la théorie effective *basse énergie* d'une théorie plus fondamentale.

En utilisant les équations du groupe de renormalisation, qui permettent d'extrapoler les constantes de couplage g, g' et α_S jusqu'à des énergies élevées, on s'aperçoît que ces trois constantes atteignent le même ordre de grandeur à une échelle d'énergie de l'ordre de $10^{15} - 10^{16}$ GeV . Ceci suggère l'existence d'un degré d'unification plus élevé à de grandes échelles d'énergie. Il est alors tentant d'essayer de construire une théorie de jauge avec une seule constante de couplage et un groupe de jauge plus grand, contenant $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. La première tentative, réalisée à l'aide du groupe $SU(5)$ [8], a échoué car la théorie obtenue donne un temps de vie pour le proton incompatible avec les mesures expérimentales ($\tau_p \simeq 10^{29}$ ans dans ce modèle, alors qu'expérimentalement $\tau_p \geq 10^{32}$ ans [9, 10]). Les tentatives pour construire des théories *de grande unification* (GUT, pour Grand Unified Theory), reposent à l'heure actuelle sur les groupes $SO(10)$ ou E_6 par exemple. Une théorie de GUT dont le Modèle Standard serait la théorie effective basse énergie permettrait de plus de comprendre l'origine des 18 paramètres libres du MS :

- 3 constantes de couplage g, g' et α_S (ou g, α_S et θ_W) ;
- la masse du boson de Higgs ;
- 9 masses pour les fermions ;
- une masse de boson électrofaible (M_Z ou M_W) ;
- les 4 paramètres de la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa[1].

Une grande unification pourrait aussi expliquer la symétrie apparente entre quarks et leptons (l'arrangement en trois familles pour ces deux types de particules). Dans ces approches, en effet, il n'y a pas que les interactions qu'il convient d'unifier, mais les particules également, et ces théories de grande unification associent les leptons et les quarks de manière aussi étroite que leptons et neutrinos sont associés par l'interaction électrofaible.

Dans les tentatives de grande unification la *supersymétrie* joue un rôle central. Les particules de la matière (leptons, quarks) sont des fermions qui obéissent au principe d'exclusion de Pauli et donc ne peuvent pas tous se retrouver dans le même état, par exemple l'état de plus basse énergie, ce qui assure la stabilité de la matière. Les particules qui sont échangées lors des interactions (photon,W,Z,gluons) sont des bosons et ils ont tendance, au contraire des fermions, à se retrouver tous dans le

---

[1] La matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa est une matrice de passage entre états propres de masse et états propres de l'interaction faible (pour les quarks). En effet, les états propres de masse des quarks ne sont pas les mêmes que les états propres de l'interaction faible. Celle-ci agit sur des doublets $(u, d')_L, (c, s')_L, (t, b')_L$, les états d', s' et b' étant des combinaisons linéaires des états propres de masse d, s et b. Par convention, les quarks de charge 2/3 ne sont pas sujets au mélange. Le passage des états propres de masse aux états propres de l'interaction faible fait intervenir la matrice V de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d'} \\ \mathrm{s'} \\ \mathrm{b'} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \mathrm{d} \\ \mathrm{s} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est définie par quatre paramètres : trois angles et une phase mesurant la violation de CP.

même état et à agir de façon cohérente donnant facilement naissance à des ondes telles que les ondes électromagnétiques. Unifier ces deux comportements opposés semble impossible et c'est pourtant ce que fait la supersymétrie. Initialement, il s'agissait d'apparier les particules connues pour faire aparaître le boson de Higgs - pièce *ad hoc* du modèle standard - comme le partenaire inévitable des particules de matière connues : cela n'a pas marché.

La version actuelle de la supersymétrie suppose que toutes les particules sont doublées par des partenaires possédant la statistique quantique opposée, ce qui présente des avantages formels : d'une part la supersymétrie stabilise les interactions, et d'autre part elle offre une ouverture vers la gravitation, car les statistiques quantiques concernent le comportement spatial des particules et, selon la relativité générale, ce comportement est lié à la gravitation. Actuellement, la version la plus achevée de la théorie ultime est la théorie des supercordes où les particules ne sont plus des objets ponctuels mais des cordes, objets étendus. Les différents types de particules observées correspondent alors aux différents modes de vibration d'une même corde.

Bibliographie

[1] S. Weinberg, *UTTG*-05 (1997).

[2] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **A22** (1961) 579;
S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264.

[3] M. Aguiler-Benitez et al., *Review of Particle Properties, Phys. Rev.* **D50** (1994) 1173.

[4] D.J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev.* **D 8** (1973) 3633;
R.P. Feynman, *Nucl. Phys.* **B 188** (1981) 479;
I.I. Kogan, *Phys. Rev.* **D 52** (1995) 3719.

[5] CDF collaboration, F. Abe et al., *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 2626;
DØ Collaboration, S. Abachi et al., *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 2632.

[6] N.V. Krasnikov, V.A. Matveev, hep-ph/9703204 (1997).

[7] A. Pich, *FTUV*-95-19 (1995).

[8] H. Georgi et S.L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 438.

[9] Fréjus Collaboration, Ch. Berger et al., *Z. Phys.* **C50** (1991) 385.

[10] K.S. Hirata et al., *Phys. Lett.* **B220** (1989) 308.

Chapitre 2

LA PHYSIQUE A HERA

Dans ce chapitre, nous décrivons le collisionneur *électron-proton* HERA. Nous montrons que l'électron peut agir comme une sonde via l'émission d'un boson très virtuel qui va résoudre la structure partonique du proton : c'est le régime de la diffusion inélastique profonde. Nous définissons ensuite les fonctions de structure du proton et nous présentons la QCD perturbative ainsi que les prédictions qu'elle implique pour les fonctions de structure. Nous étudions également la frontière entre les régimes perturbatif et non-perturbatif de la QCD. Nous donnons ensuite un bref aperçu de l'activité expérimentale concernant les événements diffractifs et les recherches de physique au-delà du modèle standard. Finalement, notre objectif, tout au long de ce chapitre, est l'analyse de l'interdépendance des enjeux théoriques et expérimentaux. Nous montrons dans quelle mesure des tests plus précis de la QCD sont permis par une connaissance expérimentale accrue de la structure du proton.

2.1 Le collisionneur HERA

Le collisionneur électron-proton HERA (Hadron Elektron Ring Anlage) est constitué de deux accélérateurs indépendants stockant des protons de 820 GeV et des électrons de 27.5 GeV dans un tunnel d'une longueur de 6,3 km. L'énergie disponible dans le centre de masse de la réaction vaut $\sqrt{s} \simeq 300$ GeV . Afin d'utiliser au mieux l'énergie des faisceaux, il a été décidé de fabriquer un collisionneur hybride plutôt que d'utiliser l'accélérateur en mode cible fixe où, pour obtenir la même énergie dans le centre de masse, il aurait fallu faire interagir un faisceau d'électrons de 50 TeV avec une cible fixe d'hydrogène ; il aurait donc fallu disposer d'un faisceau d'électrons d'énergie $\simeq 1700$ fois plus élevée .

Les électrons et les protons sont injectés dans HERA par PETRA, à des énergies respectives de 12 et 40 GeV . La chaîne d'injection est représentée sur la fig. 2.1. Les particules sont alors accélérées jusqu'à ce qu'elles atteignent l'énergie voulue pour les collisions. La longueur des sections droites où sont placés les détecteurs H1 et ZEUS est de 360 m. De nombreux aimants guident les faisceaux à l'intérieur du tunnel (pour l'anneau des électrons : 406 aimants dipolaires, 564 aimants quadrupolaires et 410 aimants sextupolaires, et pour l'anneau des protons : 416 aimants dipolaires et 250 aimants quadrupolaires). Les faisceaux sont constitués de paquets de particules, qui peuvent se croiser en quatre zones d'interaction. Ces quatre zones sont

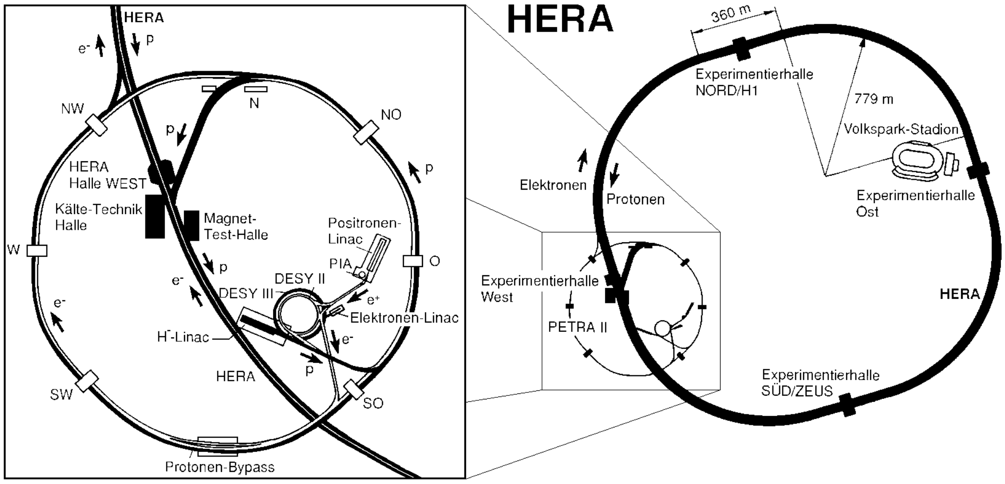


FIG. 2.1 – *Vue d'ensemble de l'accélérateur HERA et du système d'injection.*

actuellement équipées de détecteurs : il s'agit des expériences H1, ZEUS, HERA-B et HERMES.

- Les expériences H1 et ZEUS utilisent la diffusion des électrons sur les protons (en mode collisionneur avec $\sqrt{s} = 300$ GeV) pour étudier la structure du proton. Les premières collisions ont eu lieu au printemps 1992.
- L'expérience HERMES est une expérience sur cible fixe : à l'aide d'un faisceau d'électrons polarisés longitudinalement, qui diffusent sur une cible gazeuse de protons polarisés, cette expérience donne accès à la structure en spin du nucléon et a commencé à prendre des données en 1996.
- L'expérience HERA-B de diffusion de protons sur cible fixe permettra d'étudier la violation de CP dans le système $B - \bar{B}$. Elle commencera à prendre des données en 1998.

Les paramètres nominaux de HERA, ainsi que les valeurs de ces paramètres pour les prises de données de 1994 et 1995, sont indiqués dans la table 2.1. Notons que les faisceaux sont constitués de 210 paquets *collisionnels* de particules en mode de fonctionnement nominal. Parmi ceux-ci, 6 paquets de protons n'ont pas de correspondant dans le faisceau de leptons, et de même 15 paquets de leptons n'ont pas de partenaire dans le faisceau de protons. Ces paquets, appelés *pilotes*, servent à estimer le bruit de fond provenant des interactions des électrons ou des protons avec des atomes existant dans le vide imparfait du tube faisceau.

Le temps de séparation entre deux paquets de particules est de 96 ns. La fréquence des collisions est donc nettement supérieure à celle du LEP, où ce temps de croisement est de 11 μs. Ceci implique que l'électronique d'acquisition soit très rapide, préfigurant en ce sens ce que seront les futures expériences BaBar ou au LHC, où ce temps de séparation sera de 4 et 25 ns respectivement.

	nominal	1994 e^-	1994 e^+	1995 e^+
énergie (leptons) (GeV)	30	27.5	27.5	27.5
énergie (protons) (GeV)	820	820	820	820
courant moyen (leptons) (mA)	60	10.5	17.0	18.4
courant moyen (protons) (mA)	160	28.6	41.0	54
nombre de paquets	210	153	153	174
paquets pilotes (leptons)		15	15	15
paquets pilotes (protons)		6	6	6
luminosité maximale ($cm^{-2}s^{-1}$)	1.5 10^{31}	2.6 10^{30}	4.3 10^{30}	6.0 10^{30}

TAB. 2.1 – *Valeurs nominales des paramètres principaux de la machine HERA. Les valeurs de ces paramètres lors des prises de données de 1994 et 1995 sont indiquées.*

- La première prise de données à HERA utilisable pour les analyses de physique a été réalisée en juillet 1992, avec des électrons de 26.7 GeV et des protons de 820 GeV . La luminosité instantanée était alors de à $3.10^{29}cm^{-2}s^{-1}$, soit à une valeur encore bien inférieure à sa valeur nominale. Le vide était encore mal établi dans une des cavités, la préinjection était instable et de nombreux paramètres de la machine devaient être ajustés.

- En 1993, les collisions étaient réalisées avec des électrons de 26.7 GeV et l'optimisation des faisceaux avait permis un gain en luminosité d'un facteur 5. Ce gain était dû entre autres à une nette augmentation des courants par paquet d'électrons et de protons.

- En 1994, la prise de données a comporté deux phases distinctes :
  - au début de la prise de données, des électrons de 27.5 GeV ont été délivrés par la machine HERA. La luminosité accumulée par H1 pendant cette période correspond à $\simeq 0.5$ pb $^{-1}$;
  - à partir du mois d'août 1994, les électrons ont été remplacés par des positons. La principale motivation était que ce changement permettait d'accroître nettement la luminosité, en augmentant le courant par paquet de leptons et surtout la durée de vie du faisceau de leptons. Durant cette période, la luminosité instantanée maximale atteignait $\simeq 3.10^{30}cm^{-2}s^{-1}$,

et une luminosité intégrée de $\simeq 3$ pb^{-1} a pu être utilisée pour les analyses de physique ;

- En 1995, l'intégralité de la prise de données a été effectuée avec des positons. La luminosité maximale a atteint $\simeq 6.10^{30}$cm^{-2}s^{-1}, ce qui a permis à H1 d'accumuler $\simeq 5.5$ pb^{-1} (voir fig. 2.2).

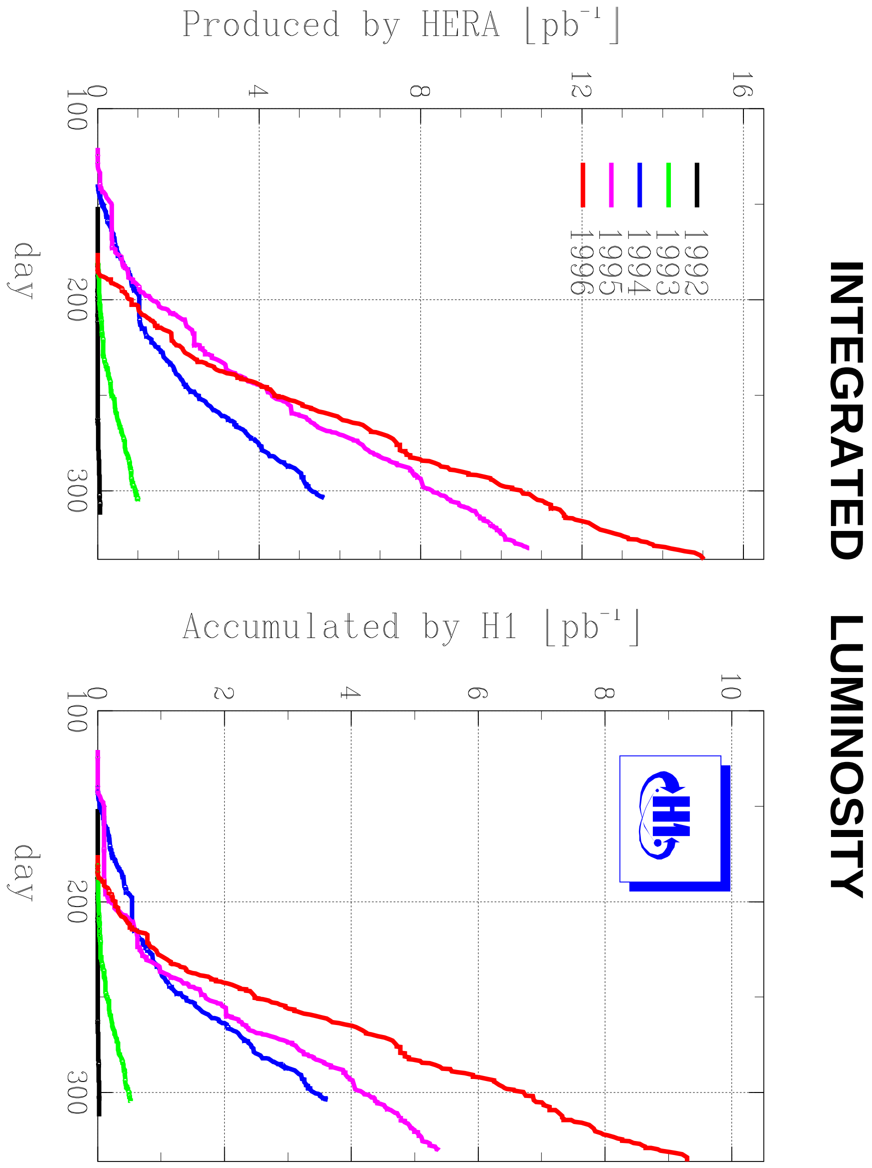


FIG. 2.2 – *Luminosité délivrée par HERA (en haut) et accumulée par H1 (en bas) depuis le début de la prise de données en 1992,* $\int_{92}^{96} \mathcal{L}_{H1} = 18$ *pb*$^{-1}$.

2.2 La diffusion profondément inélastique

2.2.1 Définition

HERA est, comme on l'a signalé, parfaitement adapté pour étudier la structure du proton via les réactions de diffusion du type $e^- + p \to e^- + X$, où X représente l'état final hadronique. De telles réactions de collision *électron-proton* peuvent se produire dans un régime particulier de diffusion : celui de la *Diffusion Inélastique Profonde*[1](DIP). La diffusion est *inélastique* car le proton se brise en un état final hadronique (X) généralement constitué de plusieurs particules, et la diffusion est *profonde* car le moment échangé lors de la collison $e^- + p$ permet de résoudre le proton dans ses constituants ponctuels et donc de sonder le proton profondément.

Dans les mesures inclusives qui vont nous intéresser dans la suite de cette discussion, on ne cherche pas à étudier en détail la structure de l'état final hadronique ; dès lors, deux variables cinématiques suffisent pour décrire l'état final $e^- + X$ (par exemple l'angle et l'énergie de l'électron diffusé). Dans une telle réaction, l'électron -supposé ponctuel - agit comme une sonde qui va nous fournir des informations sur la structure interne du proton.

Ainsi, de la même manière que Rutherford a pu mettre en évidence la structure interne des atomes d'or par des réactions de diffusion avec des particules α, à HERA on met en évidence la structure interne du proton par diffusion avec des électrons.

2.2.2 Variables cinématiques

La réaction : $e^- + p \to e^- + X$ peut être représentée comme suit (fig. 2.3).

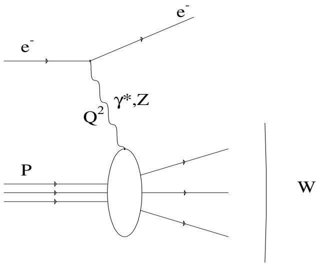


FIG. 2.3 – *Diagramme symbolisant la réaction de diffusion profondément inélastique : $e^- + p \to e^- + X$ pour laquelle on ne s'intéresse pas à l'état final hadronique X, l'étude d'une telle réaction est alors qualifiée d'inclusive.*

On note $k, k', q = k - k', P$ les quadri-impulsions de l'électron incident, de l'électron diffusé, du boson virtuel échangé (photon ou Z) et du proton incident. L'énergie

---

[1] $e^- + p \to e^- + X$ est une réaction dite de courant neutre où le lepton diffusé est un électron -le boson échangé étant électriquement neutre-, nous nous intéressons dans la suite uniquement à ce type de diffusion. Il existe également des réactions dites de courant chargé où le lepton diffusé est un neutrino : $e^- + p \to \nu_{e^-} + X$. De plus, dans la suite de cette présentation, nous nommons électron le lepton impliqué dans la réaction ; en pratique, il peut également s'agir d'un positon, les résultats exposés ci-dessous restant identiques.

dans le centre de masse de cette réaction est alors

$$\sqrt{s} = \sqrt{(p+k)^2} \simeq \sqrt{4P^0k^0} \sim 300 \text{ GeV} \tag{2.1}$$

En supposant connues les énergies des deux particules incidentes, la réaction $e^- + p \rightarrow e^- + X$, pour une énergie dans le centre de masse donnée ($\sqrt{s}$), est caractérisée complètement par deux variables cinématiques, par exemple l'angle et l'énergie de l'électron diffusé (E'_e, θ_e) qui sont des variables déterminées par l'expérience. On définit également 4 variables cinématiques -invariantes de Lorentz- qui peuvent s'exprimer en fonction de E'_e et θ_e. Nous montrons par la suite que les sections efficaces de DIP s'expriment plus naturellement en fonction de ces variables qui sont invariantes de Lorentz :

$$Q^2 = -q^2 = -(k-k')^2 \tag{2.2}$$

$$x_{Bj} = \frac{Q^2}{2Pq} \tag{2.3}$$

$$y = \frac{Pq}{Pk} \tag{2.4}$$

$$W^2 = (P+q)^2 = {M_p}^2 + Q^2\, \frac{1-x_{Bj}}{x_{Bj}} \tag{2.5}$$

- le carré de la quadri-impulsion transférée Q^2 définit le pouvoir de résolution du boson virtuel (photon ou Z) échangé entre l'électron et le proton dans le plan transverse à leurs impulsions. Ce *boson sonde* de virtualité Q^2 résoud la structure de la cible à des distances de l'ordre de $\lambda \simeq \frac{1}{Q}$;

- la variable de Bjorken x_{Bj} trouve une interprétation simple dans le référentiel de moment infini pour le proton. Elle peut être interprétée comme la fraction d'impulsion du proton portée par le parton sur lequel l'électron interagit élastiquement [1]. Cette interprétation est correcte à la limite de Bjorken [2] pour des valeurs de Q^2 plus grandes que l'échelle typique des énergies hadroniques, soit Q^2 plus grand que $\simeq$ 1 GeV ^{2} (voir fig. 2.4). De plus x_{Bj} est relié à la taille longitudinale du volume d'interaction sur lequel l'électron se couple au parton chargé interagissant : $l_x \sim \frac{1}{x_{Bj}}$ [3] ;

- y représente la fraction d'énergie transférée de l'électron au proton dans le référentiel où le proton est au repos. Cette variable est également appelée paramètre d'inélasticité.

- W est la masse invariante du système hadronique X ;

- si on néglige les masses des électron et proton incidents devant leurs énergies, on peut écrire la relation suivante: $y = \frac{Q^2}{s\,x}$. Dans cette approximation, on déduit les expressions des variables cinématiques -invariantes de Lorentz- en fonction des énergies de l'électron incident (E_e), du proton incident (E_p), de

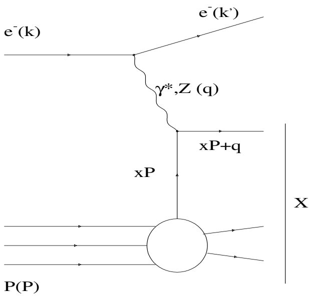


FIG. 2.4 – *Ce diagramme représente un parton d'impulsion xP interagissant avec un boson virtuel. Pour un parton de masse nulle, on peut écrire : $(xP+q)^2 = 0$ et l'on voit que l'on peut identifier x à la variable de Bjorken lorsque l'on néglige la masse du proton devant le moment transféré, ce qui correspond bien à l'interprétation donnée ci-dessus pour x_{Bj} : fraction de l'impulsion du proton emportée par le parton interagissant. Dans la suite, on note x pour x_{Bj}.*

l'électron diffusé (E'_e) et de l'angle de l'électron diffusé (θ_e)[2] :

$$\begin{aligned}
Q^2 &= 4E_eE_e^{'}\cos^2(\theta_e/2) \\
x &= \frac{E_eE_e^{'}\cos^2(\theta_e/2)}{(E_p)(E_e - E_e^{'}\sin^2(\theta_e/2))} \\
y &= 1 - \frac{E_e^{'}}{E_e}\sin^2(\theta_e/2) = \frac{Q^2}{sx} \\
s &= 4E_eE_p
\end{aligned} \tag{2.6}$$

On montre également que les variables définies ci-dessus vérifient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&W^2 \geq 0 \\
&0 < Q^2 \leq s \\
&0 \leq x \leq 1 \\
&0 \leq y \leq 1
\end{aligned} \tag{2.7}$$

2.3 Fonctions de structure du proton en diffusion profondément inélastique

2.3.1 Définitions

La mesure fondamentale en Diffusion Inélastique Profonde (DIP) concerne la section efficace de la réaction $e^- + p \rightarrow e^- + X$ en fonction des variables cinématiques

---

[2] L'axe $z > 0$ correspond à la direction du faisceau de protons ; ainsi, $\theta_e = \pi$ signifie que l'électron n'est pas dévié.

introduites précédemment. Comme nous l'avons vu, le modèle des partons fournit une image physique simple : la diffusion intervient par le biais d'un photon virtuel (émis par l'électron) qui se couple à un constituant ponctuel du proton, (qui peut être un quark ou un antiquark). La section efficace est alors proportionnelle à la densité de quark dans le proton.

L'expression générale de la section efficace différentielle de $e^- + p \rightarrow e^- + X$ s'écrit :

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4}(xy^2 F_1(x,Q^2) + (1-y)F_2(x,Q^2)) \tag{2.8}$$

où $F_1(x,Q^2)$ et $F_2(x,Q^2)$ sont des fonctions de structure du proton. Elles sont définies par cette dernière formule et trouvent une interprétation simple dans le cadre du modèle des partons (voir plus bas) ; α est la constante de structure fine.

Cette équation peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{xQ^4}\left((1-y+\frac{y^2}{2})F_2(x,Q^2) - \frac{y^2}{2}F_L(x,Q^2)\right) \tag{2.9}$$

Dans cette expression, nous avons introduit la fonction de structure longitudinale $F_L(x,Q^2)$, définie comme suit :

$$F_L(x,Q^2) = F_2(x,Q^2) - 2xF_1(x,Q^2)$$

Il est intéressant de relier les fonctions de structure définies ci-dessus aux sections efficace de photo-absorption de photons virtuels transverses et longitudinaux (resp. σ_T et σ_L), on déduit :

$$\begin{aligned} F_L &= a\sigma_L \\ 2xF_1 &= a\sigma_T \\ F_2 &= a(\sigma_T + \sigma_L) \end{aligned} \tag{2.10}$$

où a est un facteur de flux cinématique : $a = \frac{Q^2}{4\pi^2\alpha}$. On obtient alors :

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = A(x,Q^2)((2(1-y)+y^2)\sigma_T(x,Q^2) + 2(1-y)\sigma_L(x,Q^2)) \tag{2.11}$$

où $A(x,Q^2)$ est une fonction des variables cinématiques x et Q^2. On note généralement R le rapport des sections efficaces σ_L et σ_T : $R = \frac{\sigma_L}{\sigma_T} = \frac{F_L}{F_2 - F_L}$.

Dans ces équations, la contribution de l'échange d'un boson Z^0, qui introduit une correction de 1% pour $Q^2 \sim 1000$ GeV ^{2}, a été négligée ; le boson virtuel échangé est alors uniquement un photon.

D'un point de vue expérimental, on ne néglige pas cette influence, F_2 est alors déduit de $\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2}$ par la formule suivante :

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4}(1+(1-y)^2)F_2(x,Q^2)(1+\delta_{F_L})(1+\delta_{Z^0})(1+\delta_r) \tag{2.12}$$

- La correction δ_{F_L} correspond à la fraction non mesurée de $\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2}$ qui provient de la photo-absorption de photons longitudinaux (σ_L), cette correction est calculée en QCD perturbative.

- La correction δ_{Z^0} représente la contribution du boson virtuel Z^0 échangé (dans le domaine en Q^2 discuté ici, cette contribution est essentiellement un effet d'interférence photon-Z^0).

- La correction δ_r est une correction radiative dominée par les processus d'émission de photons réels par l'électron incident ou diffusé.

2.3.2 Prédictions de QCD

Dans le modèle des partons (ponctuels, de spin demi-entier et sans interaction) [1], [2] ; on peut calculer les fonctions F_2 et F_L en fonction des densités de quarks q_i, d'antiquarks $\bar{q}_i$ et de leurs charges e_i :

$$F_2(x,Q^2) = \sum_{i=1}^{N_f} {e_i}^2 x(q_i(x) + \bar{q}_i(x)) \tag{2.13}$$

$$F_L(x,Q^2) = 0 \tag{2.14}$$

où la somme porte sur l'ensemble des saveurs des quarks. Dans le modèle simple où le proton est constitué seulement de 3 quarks de valence u, u, d, chacun porte la fraction $x = \frac{1}{3}$, c'est-à-dire que les les distributions $xq_i(x)$ des quarks de valence sont piquées autour de $x \simeq \frac{1}{3}$ et tendent vers 0 quand x tend vers 0 ou 1. De plus, les $xq_i(x)$ sont indépendants de Q^2 car les partons sont supposés ponctuels et leurs distributions sont dès lors indépendantes de l'échelle d'étude, c'est la propriété d'invariance d'échelle.

La chromodynamique quantique perturbative nous apprend alors que la structure de valence du proton : u, u, d, chacun avec la fraction d'impulsion du proton : $x = \frac{1}{3}$ ne va pas rester en l'état. En effet, il existe 4 couplages entre quarks et gluons prédits par QCD : $q \to q + g$, $\bar{q} \to \bar{q} + g$, $g \to q + \bar{q}$, $g \to g + g$, ainsi la structure u, u, d va évoluer en une structure plus complexe : $q_i, \bar{q}_i, g$. De plus, ces fluctuations sont de mieux en mieux résolues quand la longueur d'onde -distance de résolution- $\lambda \sim \frac{1}{Q}$ de la sonde photonique diminue. Dès lors, la dépendence en Q^2 devient explicite dans l'expression de $F_2(x,Q^2)$, et nous pouvons écrire au premier ordre en α_S :

$$F_2(x,Q^2) = \sum_i {e_i}^2 x(q_i(x,Q^2) + \bar{q}_i(x,Q^2)) + \mathcal{O}(\alpha_S) \tag{2.15}$$

$$F_L(x,Q^2) = 0 + \mathcal{O}(\alpha_S) \tag{2.16}$$

où $q_i(x,Q^2)$ est la probabilité de trouver un quark (de saveur i) localisé dans le volume d'interaction de taille transverse $R_T \sim \frac{1}{Q}$ et de taille longitudinale $\frac{1}{x}$.

Quand Q^2 augmente, la QCD prédit ainsi une déplétion de quarks à grand x ($x \sim \frac{1}{3}$) et une accumulation consécutive à bas x ($x \ll \frac{1}{3}$). En effet, quand Q^2 augmente, la sonde photonique distingue des fluctuations de plus en plus fines dans la structure en $q_i, \bar{q}_i, g$ du proton. Dans le même temps, *les quarks de la mer* (ceux produits par le couplage $g \to q + \bar{q}$) vont peupler la région des bas x. L'invariance d'échelle du modèle des partons ponctuels et sans interaction est alors mise en défaut.

2.4 Equations d'évolution de QCD

2.4.1 Equations d'évolution DGLAP (Grands Q^2)

Nous venons de voir qualitativement que les 4 couplages de QCD ($q \rightarrow q + g$, $\bar{q} \rightarrow \bar{q} + g$, $g \rightarrow q + \bar{q}$, $g \rightarrow g + g$) induisent la dynamique de l'évolution en fonction de Q^2 de la composition en quarks et gluons du proton et donc induisent l'évolution en Q^2 de $F_2(x, Q^2)$.

Effectivement, la théorie (la QCD perturbative) ne prédit pas la dépendance complète en x et Q^2 de F_2, mais, à la limite des grands Q^2, elle prédit l'évolution des densités de partons $(q_i(x, Q^2), \bar{q}_i(x, Q^2), g(x, Q^2))$ en fonction de Q^2, dès qu'elles sont spécifiées à un ${Q_0}^2$ initial.

Ces prédictions peuvent être formulées comme des équations intégro-différentielles, les équations DGLAP (Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli, Parisi) [4], qui ont été dérivées en supposant que les termes dominants dans la série de perturbation de l'amplitude de diffusion sont de la forme $\alpha_S^n(Q^2)\ln^n(Q^2/{Q_0}^2)$, approximation dite des logarithmes de Q^2 dominants (que l'on note LL(Q^2) pour *Leading Log* Q^2).

A l'ordre suivant (noté NLL(Q^2) pour *Next to Leading Log* Q^2), les termes en $\alpha_S^n(Q^2)\ln^n(Q^2/{Q_0}^2)$ et ceux en $\alpha_S^{n+1}(Q^2)\ln^n(Q^2/{Q_0}^2)$ sont pris en compte dans la série de perturbation.

Les équations DGLAP peuvent alors s'écrire :

$$\begin{aligned}
Q^2\frac{\partial\Sigma(x,Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}\left[\Sigma(y,Q^2)P_{qq}(\frac{x}{y}) + 2N_f g(y,Q^2)P_{qg}(\frac{x}{y})\right]\\
Q^2\frac{\partial g(x,Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}\left[\Sigma(y,Q^2)P_{gq}(\frac{x}{y}) + g(y,Q^2)P_{gg}(\frac{x}{y})\right]\\
Q^2\frac{\partial q_{NS}(x,Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}q_{NS}(y,Q^2)P_{NS}(\frac{x}{y}) \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

avec $\Sigma(x, Q^2) = \sum_{i=1}^{N_f}[q_i(x, Q^2) + \bar{q}_i(x, Q^2)]$ qui est une distribution de type singlet (symétrique de saveur) et $q_{NS}(x, Q^2)$ qui est une distribution de type non-singlet (antisymétrique de saveur) : par exemple, $q_{NS}(x, Q^2) = u(x, Q^2) - \bar{u}(x, Q^2) = u_V(x, Q^2)$, qui est la distribution des quarks de valence de type u. Dans ces équations, les $P_{ij}(z)$ sont appelées fonctions de splitting et sont associées aux densités de probabilité de transition pour les 4 couplages de la QCD introduits plus haut (voir fig. 2.5) [4].

Le domaine de validité de ces équations, domaine sur lequel la sommation des termes dominants en $\alpha_S^n(Q^2)\ln^n(Q^2/{Q_0}^2)$ est une approximation correcte dans le cadre de la QCD perturbative, est alors défini comme suit :

$$\begin{aligned}
\alpha_S(Q^2)\ln(Q^2/Q_0^2) &\sim 1\\
\alpha_S(Q^2)\ln(1/x) &\ll 1\\
\alpha_S(Q^2) &\ll 1 \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

La dépendance en Q^2 de la constante de couplage renormalisée $\alpha_S(Q^2)$ est déduite du groupe de renormalisation [5], qui donne à l'approximation des $\ln Q^2$ dominants

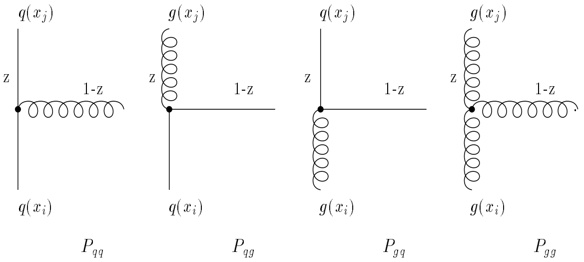


FIG. 2.5 – *Diagrammes de Feynman représentant les fonctions de splitting $P_{ij}(z)$. Notons que les fonctions P_{qq}, P_{qg} et P_{gq} sont indépendantes de la saveur du quark q, nous omettons donc l'indice de saveur dans l'écriture de ces fonctions. On définit de même les fonctions de splitting pour les antiquarks $P_{\bar{q}g}$ et $P_{g\bar{q}}$; par conjugaison de charge, on montre que $P_{\bar{q}g} = P_{qg}$ et $P_{g\bar{q}} = P_{gq}$.*

(LL(Q^2)) :

$$\alpha_S^0(\mu^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)\ln\frac{\mu^2}{\Lambda^2}} \tag{2.19}$$

De même, à l'approximation NLL(Q^2) on obtient :

$$\alpha_S(\mu^2) = \alpha_S^0(\mu^2)(1 - \frac{102 - \frac{38N_f}{3}}{(11 - \frac{2N_f}{3})^2}\frac{\ln\ln\frac{\mu^2}{\Lambda^2}}{\ln\frac{\mu^2}{\Lambda^2}}) \tag{2.20}$$

Dans l'expression des équations DGLAP, nous avons choisi une échelle de masse arbitraire de renormalisation (μ) : $\mu = \sqrt{Q^2}$.

Dès lors, $\Lambda = \Lambda_{QCD}$ est le seul paramètre libre de la théorie et ce paramètre fixe l'échelle d'énergie non perturbative, il doit être déterminé expérimentalement et nous montrons dans la suite de cette discussion quelle procédure peut être adoptée pour cette détermination.

Les fonctions de splitting sont déterminées par le calcul, on obtient :

$$P_{ij}(z) = P_{ij}^{(0)}(z) + \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} P_{ij}^{(1)}(z) \tag{2.21}$$

$$P_{NS}(z) = P_{NS}^{(0)}(z) + \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} P_{NS}^{(1)}(z) \tag{2.22}$$

avec

$$P_{NS}^{(0)}(z) = \frac{4}{3}\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + 2\delta(1-z)$$

$$P_{qq}^{(0)}(z) = \frac{4}{3}\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + 2\delta(1-z)$$

$$P_{qg}^{(0)}(z) = \frac{1}{2}\left[z^2 + (1-z)^2\right]$$

$$
\begin{aligned}
P_{gq}^{(0)}(z) &= \frac{4}{3}\frac{1+(1-z)^2}{z} \\
P_{gg}^{(0)}(z) &= 6\left[\frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) + \left(\frac{11}{12} - \frac{N_f}{18}\right)\delta(1-z)\right]
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

où la distribution $(1-z)_+^{-1}$ est définie par :

$$\int_0^1 dz \frac{f(z)}{(1-z)_+} = \int_0^1 \frac{f(z)-f(1)}{1-z} dz \tag{2.24}$$

$$(1-z)_+ = (1-z) \ \ pour \ \ z<1 \tag{2.25}$$

Les $P_{ij}^{(0)}(z)$ sont les fonctions de splitting exprimées à l'approximation LL(Q^2) et les $P_{ij}^{(1)}(z)$ sont les corrections pour l'approximation NLL(Q^2) [6]. Ces fonctions de splitting vérifient également quelques propriétés importantes à tout ordre de la théorie des perturbations.

- La conservation du nombre total de quarks moins d'antiquarks implique :

$$\int_0^1 P_{qq}(z)dz = 0$$

- La conservation de l'impulsion aux vertex permet d'écrire :
$P_{qq}(z) = P_{gq}(1-z)$, $P_{qg}(z) = P_{qg}(1-z)$ et $P_{gg}(z) = P_{gg}(1-z)$.

- La conservation de l'impulsion totale implique aussi :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 z\left[P_{qq}(z) + P_{gq}(z)\right] dz = 0 \\
&\int_0^1 z\left[2N_f P_{qg}(z) + P_{gg}(z)\right] dz = 0
\end{aligned}
$$

Les équations d'évolution DGLAP ont été à l'origine déduites d'une analyse des propriétés du groupe de renormalisation et d'un développement en opérateurs de Wilson [7], [8] ; cependant, une approche diagrammatique qui somme des diagrammes en échelle de quarks et gluons est équivalente et montre assez naturellement (en jauge axiale) à quels types de diagrammes de Feynman correspondent les termes dominants en $\alpha_S^n(Q^2)\ln^n(Q^2/{Q_0}^2)$ dans la sommation de la série de perturbation (voir fig. 2.6).

Les équations DGLAP sont ainsi des équations -de type équations maîtresses- d'évolution en Q^2 des densités de quarks (anti-quarks) et gluons, et elles représentent la traduction mathématique, dans le cadre de la QCD perturbative, des 4 couplages de QCD : $q \to q+g$, $\bar{q} \to \bar{q}+g$, $g \to q+\bar{q}$, $g \to g+g$.

Les relations entre les fonctions de structure F_2, F_L et les densités de quarks sont alors à l'approximation LL(Q^2) :

$$
\begin{aligned}
F_2(x,Q^2) &= \sum_i {e_i}^2 x(q_i(x,Q^2) + \bar{q}_i(x,Q^2)) \qquad (2.26)\\
F_L(x,Q^2) &= 0 \qquad (2.27)
\end{aligned}
$$

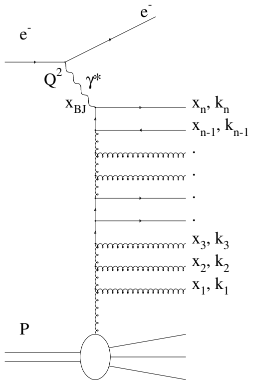


FIG. 2.6 – *Les équations DGLAP peuvent être dérivées par la sommation des diagrammes du type diagramme en échelle de quarks et gluons. Par exemple le diagramme ci-dessus contribue pour un terme en* $\alpha_S^n(Q^2)\ln^n(Q^2/Q_0^2)$ *dans la sommation, l'espace des phases considéré pour calculer ce terme étant défini comme suit :* $x \leq x_n \leq ... \leq x_2 \leq x_1$ *et* $Q^2 \gg k_n^2 \gg \cdots \gg k_2^2 \gg k_1^2 \gg Q_0^2$

Ces relations deviennent à l'approximation NLL(Q^2) :

$$F_2(x,Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y}\,(\sum_i C_2^i(y,Q^2)\,q_i(x/y,Q^2) + C_2^g(y,Q^2)\,g(x/y,Q^2)) \qquad (2.28)$$

$$F_L(x,Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y}\,(\sum_i C_L^i(y,Q^2)\,q_i(x/y,Q^2) + C_L^g(y,Q^2)\,g(x/y,Q^2)) \qquad (2.29)$$

les $C_2^i(y,Q^2)$, $C_2^g(y,Q^2)$, $C_L^i(y,Q^2)$, $C_L^g(y,Q^2)$ sont des fonctions -coefficients de Wilson-déterminées par le calcul [6].

2.4.2 Equation d'évolution BFKL (bas x)

Nous avons vu que les équations DGLAP sont déduites de la sommation formelle de tous les termes en $\alpha_S^n(Q^2)\ln^n(Q^2/{Q_0}^2)$; par suite, ces équations négligent les termes du type $\alpha_S^n\ln^n(1/x)$ (dans la mesure où ils ne sont pas en facteur d'un terme en $\ln^n(Q^2/{Q_0}^2)$), or, ces termes deviennent dominants à bas x. Dès lors, une autre approche est nécessaire pour la région des bas x à Q^2 moyen (région où l'approximation des logarithmes dominants n'est plus correcte) ; dans cette nouvelle approche, on resomme tous les termes dominants en $\alpha_S^n\ln^n(1/x)$. Cette sommation conduit alors à l'équation BFKL (Balitski, Fadin, Kuraev et Lipatov) [9].

Elle prédit l'évolution de la densité de gluon en fonction de x dès que cette dernière a été spécifiée à $x = x_0$.

Le domaine de validité de cette équation est alors :

$$\begin{aligned} &\alpha_S \ln\frac{1}{x} \simeq 1 \\ &\alpha_S \ln(Q^2/Q_0^2) \ll 1 \\ &\alpha_S \ll 1 \end{aligned} \tag{2.30}$$

On montre que l'équation d'évolution pour le gluon peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} -x\frac{\partial f(x,k_T^2)}{\partial x} &= \frac{3\alpha_S}{\pi}k_T^2 \int \frac{dk_T'^2}{k_T'^2}\left[\frac{f(x,k_T'^2)-f(x,k_T^2)}{|k_T'^2-k_T^2|} - \frac{f(x,k_T^2)}{(4k_T'^4+k_T^4)^{1/2}}\right] \\ &= K\otimes f \end{aligned} \tag{2.31}$$

où $f(x,k_T^2)$ est la distribution de gluons non intégrée portant la fraction d'impulsion longitudinale x et d'impulsion transverse au carré k_T^2. De plus, f est reliée à la distribution de gluon intégrée $xg(x,Q^2)$ par la formule suivante :

$$\int_0^{Q^2} \frac{dk_T^2}{k_T^2} f(x,k_T^2) = xg(x,Q^2) \tag{2.32}$$

Cette équation a été déterminée dans le cadre de l'approximation des $\ln(1/x)$ dominants qui resomme tous les termes en $\alpha_S^n \ln^n(1/x)$ quel que soit n, et où α_S est pris comme un paramètre constant.

On montre alors que le comportement à bas x de f est déterminé par la plus grande valeur propre λ_L de l'équation aux valeurs propres :

$$K\otimes f_n = \lambda_n f_n$$

Dès lors :

$$f \sim \exp(\lambda_L \ln(1/x)) = x^{-\lambda_L} \tag{2.33}$$

$$\lambda_L = \frac{3\alpha_S}{\pi}\, 4\ \ln 2 \tag{2.34}$$

Plus précisément, on obtient :

$$f \sim x^{-\lambda_L}\sqrt{k_T^2}\, exp\left(\frac{-\ln^2(k_T^2/\bar{k_T}^2)}{\ln(1/x)}\right) \tag{2.35}$$

En plus du comportement en $x^{-\lambda_L}$, le second caractère de la solution $f(x,k_T^2)$ est une diffusion en k_T quand x diminue, comme le montre sa forme gaussienne en $\ln k_T^2$ avec une largeur qui croît en $\sqrt{\ln(1/x)}$ quand x décroît. L'origine physique de cette diffusion est claire : puisqu'il n'y a pas de fort ordonnancement en k_T pour une échelle de gluons donnée intervenant dans la sommation BFKL, l'espace de phase d'intégration en k_T pour cette échelle est celui d'une marche aléatoire en k_T le long de la chaine de gluons et donc une évolution vers les bas x est accompagnée par une diffusion en k_T.

2.4.3 Equation d'évolution GLR (saturation)

Cette forme en $x^{-\lambda_L}$ pour la densité de gluons à bas x ($\alpha_S \ln \frac{1}{x} \simeq 1$) ne peut pas être acceptable quel que soit x, quand x diminue, autrement, on obtiendrait une violation de l'unitarité (la section efficace de diffusion $\gamma^\star - p$ deviendrait plus grande que la surface géométrique du proton). Ceci se produit lorsque:

$$W = \frac{\alpha_S(Q^2)}{\pi R^2 Q^2} xg(x, Q^2) \gg 1 \tag{2.36}$$

où R est un paramètre: $R \sim 1$ GeV $^{-1}$ tel que πR^2 est la surface transverse dans laquelle les gluons sont concentrés à l'intérieur du proton. C'est pourquoi, des effets de saturation qui peuvent se produire par recombinaison de gluons sont à envisager. L'équation BFKL devient alors (équation GLR -Gribov,Levin,Ryskin- [10], [11]):

$$-x\frac{\partial f}{\partial x} = K \otimes f - V \otimes f^2 \tag{2.37}$$

K est le noyau BFKL précédemment défini et V est un terme de la forme [10]:

$$V \simeq \frac{\alpha_S^2}{k_T^2 R^2} \tag{2.38}$$

2.5 Comportement de F_2 à bas x

Il est nécessaire de distinguer trois limites différentes à bas x:

- d'abord la limite de type DGLAP à bas x et grand Q^2:

$$\alpha_S \ln \frac{1}{x} \simeq 1 \qquad \alpha_S \ln(Q^2/Q_0^2) \sim 1$$

- ensuite la limite de type BFKL à bas x et moyen Q^2:

$$\alpha_S \ln \frac{1}{x} \simeq 1 \qquad \alpha_S \ln(Q^2/Q_0^2) \ll 1$$

- nous étudions aussi dans un prochain paragraphe la limite à bas x et petit Q^2 ($Q^2 \leq 1$ GeV ^{2}) qui correspond au domaine non-perturbatif (domaine de Regge).

2.5.1 Limite DGLAP

Pour ce qui concerne les équations d'évolution DGLAP, nous avons montré que les distributions de quarks et gluons à un Q^2 donné dépendent de la forme des conditions initiales (à ${Q_0}^2$).

Cas d'une densité de gluons initiale non divergente quand $x \to 0$

La limite à bas x de ces équations permet cependant de dériver une prédiction asymptotique ($1/x \gg 1, Q^2/{Q_0}^2 \gg 1$) valable pour toutes distributions initiales qui ne soient pas de la forme $x^{-\lambda}$, λ strictement positif.

Les équations DGLAP peuvent s'écrire comme suit, en omettant la partie non-singlet qui ne contribue pas à bas x :

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} \Sigma \\ g \end{pmatrix} = \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \begin{pmatrix} P_{qq} & 2N_f P_{qg} \\ P_{gq} & P_{gg} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \Sigma \\ g \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

où le produit de convolution est défini par :

$$P \otimes f(x) = \int_x^1 \frac{dy}{y} P(y) f(x/y)$$

A bas x, après développement asymptotique des fonctions de splitting en $\frac{1}{x}$, les équations deviennent :

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} \Sigma \\ g \end{pmatrix} = \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2C_F}{x} & \frac{2C_A}{x} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \Sigma \\ g \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

avec $C_F = 4/3, C_A = 3$.

On montre alors que le comportement de F_2 à bas x est gouverné par la distribution de gluons via la production de paires $q\bar{q}$ ($g \to q + \bar{q}$) [12]. On obtient :

$$F_2(x, Q^2) \sim \exp \sqrt{4 \frac{3\alpha_S}{\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \ln \frac{1}{x}} \tag{2.41}$$

Il est intéressant de voir que ce résultat peut être dérivé directement à partir des diagrammes en échelle (de gluons) qui sont les graphes dominants dans l'approche DGLAP à bas x (voir fig. 2.7). En effet, à chaque vertex, la probabilité d'émettre un gluon dans l'élément d'espace des phases $dx_i d{k_i}^2$ est :

$$P_i \ (= P_{gg}) = \frac{3\alpha_S}{\pi} \frac{dx_i}{x_i} \frac{dk_i^2}{k_i^2}$$

Alors, le fort ordonnancement en ${k_i}^2$ qui donne les termes -dominants- en $\ln(Q^2)$ doit être associé avec le fort ordonancement en x_i qui va donner la contribution dominante en $\ln(1/x)$.

Les conditions d'intégration sont les suivantes :

$$\begin{aligned} Q^2 \gg k_n^2 \gg ... \gg k_i^2 \gg k_{i-1}^2 \gg ... \gg Q_0^2 \\ x \ll x_n \ll ... \ll x_i \ll x_{i-1} \ll ... \ll x_0 \end{aligned} \tag{2.42}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} xg(x, Q^2) = \sum_n \prod_{i=1}^{n-1} P_i \ &= \sum_n \left(\frac{N_c \alpha_S}{\pi} \right)^{n-1} \int_x^1 \frac{dx_{n-2}}{x_{n-2}} ... \int_{x_i}^1 \frac{dx_{i-1}}{x_{i-1}} ... \int_{x_1}^1 \frac{dx_0}{x_0} \\ &\int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk_{n-1}^2}{k_{n-1}^2} ... \int_{Q_0^2}^{k_i^2} \frac{dk_{i-1}^2}{k_{i-1}^2} ... \int_{Q_0^2}^{k_2^2} \frac{dk_1^2}{k_1^2} xg(x_0, {Q_0}^2) \\ &\sim \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{3\alpha_S}{\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \ln \frac{1}{x} \right)^n \\ &\sim \exp \sqrt{4 \frac{3\alpha_S}{\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \ln \frac{1}{x}} \end{aligned} \tag{2.43}$$

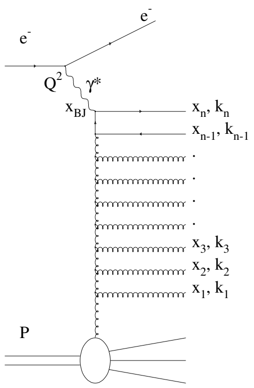


FIG. 2.7 – *Diagramme d'ordre n en échelle de gluons dont la contribution à l'amplitude de diffusion ep est dominante à bas x ($P_{gg} \sim \frac{1}{x}$ à bas x). L'espace des phases intervenant dans le calcul de cette amplitude est défini par les deux relations suivantes (pour le cas DGLAP) : $Q^2 \gg k_n^2 \gg ... \gg k_i^2 \gg k_{i-1}^2 \gg ... \gg Q_0^2$ et $x \ll x_N \ll ... \ll x_i \ll x_{i-1} \ll ... \ll x_0$*

Par suite :

$$F_2 \sim \exp\sqrt{4\frac{3\alpha_S}{\pi}\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\ln\frac{1}{x}} \tag{2.44}$$

Cette prédiction asymptotique présente un comportement particulier : on voit que xg ou F_2 augmentent quand x tend vers 0, plus rapidement que n'importe quelle puissance de $\ln(1/x)$ et moins vite que n'importe quelle puissance de $1/x$. Elle est appelée approximation DLL (*Double Leading Log*) [12], [13].

Cas d'une densité de gluons initiale divergente quand $x \to 0$

Rappelons l'hypothèse de départ de la prédiction ci-dessus : la distribution initiale (à ${Q_0}^2$) de la distribution de gluons (soit $xg(x, {Q_0}^2)$) ne doit pas être une fonction de x de la forme $x^{-\lambda}$, λ strictement positif. Si tel est le cas, alors c'est la singularité de la distribution initiale qui gouverne la dynamique de l'évolution DGLAP [14] et quel que soit Q^2, on a :

$$xg(x, Q^2) \simeq h(Q^2)\ x^{-\lambda} \tag{2.45}$$

De même :

$$F_2(x, Q^2) \simeq \mathcal{H}(Q^2)\ x^{-\lambda} \tag{2.46}$$

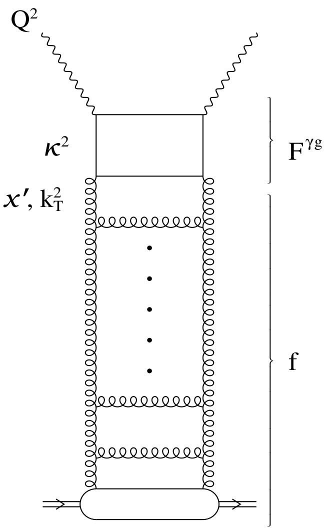


FIG. 2.8 – *Diagramme en échelle de gluons intervenant dans la sommation BFKL. C'est également une représentation de la formule de factorisation en* k_T : $F_i = F^{\gamma g} \otimes f$*, dans laquelle* f *est la distribution de gluons non intégrée, et* $F_i^{\gamma g}$ *est la fonction de structure du gluon virtuel qui caractérise le processus de fusion photon-gluon.*

2.5.2 Limite BFKL

On a montré que l'équation BFKL prédit que la distribution de gluons non intégrée $f(x, k_T^2)$ est dominée quand $x \to 0$ par une solution analytique de la forme :

$$f \sim x^{-\lambda_L} \sqrt{k_T^2} exp\left(\frac{-\ln^2(k_T^2/\bar{k_T}^2)}{\ln(1/x)} \right)$$

avec $\lambda_L = \frac{3\alpha_S}{\pi} 4 \log 2$ ($\lambda_L \sim 0.32$ pour $\alpha_s = 0.12$), il est alors possible de calculer F_2 en utilisant le théorème de factorisation en k_T que l'on représente schématiquement sur la fig. 2.8. Alors :

$$F_2 = F^{\gamma g} \otimes f + F_2^{bf} \simeq \mathcal{C}(Q^2)\ x^{-\lambda_L} + F^{bf} \tag{2.47}$$

où $F^{bf} \sim 0.4$ est une contribution non-perturbative du bruit de fond constante à bas $x \leq 0.05$ et déterminée par le comportement de F_2 à grand $x \sim 0.1$ [15].

2.5.3 Synthèse

Les prédictions concernant la forme de F_2 à bas x sont diverses : pour une approche de type DGLAP, on a mis en évidence les solutions (2.44) et (2.46) et pour une approche de type BFKL on a déduit la formule (2.47).

L'expérience doit donc nous apprendre quelle image physique est la plus pertinente dans la région cinématique recouverte par les données ; alors, il sera possible de donner les ordres de grandeurs des variables x et Q^2 lors des transitions entre les différents régimes d'évolution de QCD (voir fig. 2.9) :

- l'ordre de grandeur de $x \sim x_{BFKL}$ -non prédit par la théorie- tel que :
  - (i) $x \leq x_{BFKL}$ correspond au régime BFKL.
  - (ii) $x \geq x_{BFKL}$ correspond au régime DGLAP.
- l'ordre de grandeur de $x \sim x_{GLR}$ tel que :
  - (iii) $x \leq x_{GLR}$ correspond au régime GLR pour lequel les effets de saturation se manifestent dans F_2.
- l'ordre de grandeur de $Q^2 \sim Q^2_{np}$ tel que :
  - (i') $Q^2 \leq Q^2_{np}$ est le régime non-perturbatif de Regge pour lequel la QCD perturbative ne s'applique pas, pour ce régime de Regge on attend pour F_2 un comportement du type $F_2 \sim x^{-0.08}$ [16], [17]. Les modèles de type Regge fournissent par exemple des paramétrisations remarquables de toutes les sections efficaces hadron-hadron.
  - (ii') $Q^2 \geq Q^2_{np}$ est le régime perturbatif où notre discussion de la QCD perturbative s'applique.

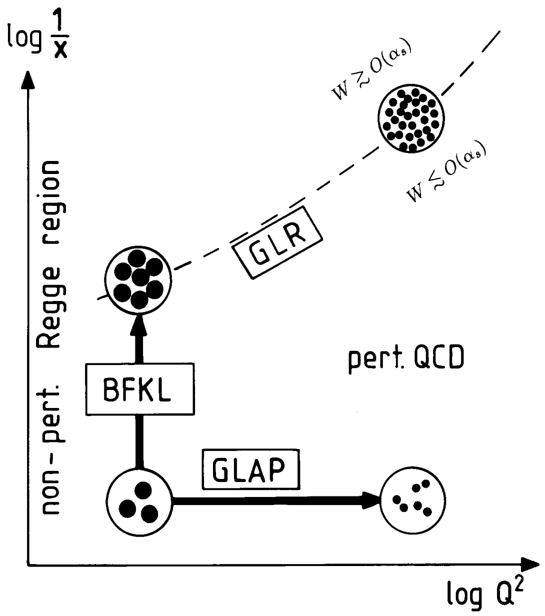


FIG. 2.9 – *Représentation schématique des différents régimes d'évolution de QCD repérés dans le plan cinématique. Les valeurs de x et Q^2 aux frontières entre les divers régimes ne sont pas précisées car c'est à l'expérience de les déterminer (voir texte).*

2.6 La QCD perturbative à l'épreuve de l'expérience

2.6.1 Introduction

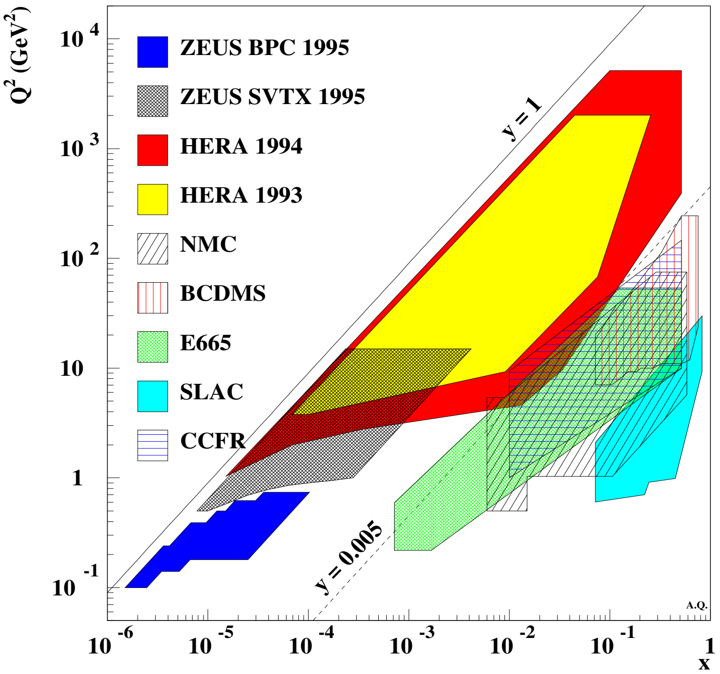


FIG. 2.10 – *Plan cinématique regroupant les principales expériences en mode collisionneur ou en mode cible fixe (voir table 2.2). La couverture de ce plan cinématique est remarquable et permet de tester la QCD perturbative dans ses différents régimes d'évolution (voir fig. 2.9).*

Le domaine cinématique couvert par les données de HERA de 1994 s'étend sur plusieurs ordres de grandeur en Q^2 et en x (voir fig. 2.10) :

$$1 \leq Q^2 \leq 5000 \text{ GeV}^2 \qquad 10^{-5} \leq x \leq 0.32$$

Cette couverture du plan cinématique est de plus parfaitement complétée par les mesures des expériences sur cible fixe qui se concentrent dans la région des grands x ($x \geq 0.1$). Le domaine cinématique ainsi décrit peut être comparé avec intérêt au plan schématique qui contient les différents domaines d'évolution de QCD (voir fig. 2.9), on note alors que les données permettent a priori des tests de QCD dans ses différents régimes d'évolution.

Sur la fig. 2.11, la fonction de structure du proton mesurée par les expériences H1 [18] et ZEUS [19] en 1994 -auprès du collisionneur HERA- est présentée avec les données d'expériences sur cible fixe : E665 [20],NMC [21] et BCDMS [22] ; quelques informations concernant ces trois expériences sont données dans la table 2.2. Dans la suite de notre présentation, la fonction de structure du proton est notée F_2 ou F_2^{ep}.

Faisceau	Cible	Expérience	Pub. finale	x, Q^2 GeV ^{2}	$\Lambda^{(4)}_{QCD}$ MeV
	lourde				
ν	$CaCO_3$	$CHARM$	1984		300 ± 157
ν	Fe	$CDHS$	1984	$0.015 \leq x \leq 0.65$ $0.5 < Q^2 < 200$	
μ	Fe	$EMC - NA2$	1986	$0.03 < x < 0.8$ $3 < Q^2 < 250$	
μ	C	$BCDMS$	1987	$0.25 \leq x \leq 0.75$ $25 < Q^2 < 260$	230 ± 63
ν	Fe	$CDHSW$	1989	$0.015 \leq x \leq 0.65$ $0.5 < Q^2 < 200$	310 ± 110
ν	Fe	$CCFR$	1992	$0.015 \leq x \leq 0.55$ $1 < Q^2 < 150$	210 ± 50
	légère				
μ	H_2, D_2	$EMC - NA2$	1985, 87	$0.03 < x < 0.8$ $3 < Q^2 < 250$	211 ± 117
μ	H_2, D_2	$BCDMS$	1989, 90	$0.07 \leq x \leq 0.75$ $7 < Q^2 < 260$	263 ± 42
e	H_2, D_2	$SLAC$	1990	$0.07 \leq x \leq 0.85$ $Q^2 < 25$	263 ± 42
μ	D_2	$EMC - NA28$	1989	$x < 0.14$	211 ± 108
μ	H_2, D_2	$E665$	1995	$0.0008 \leq x \leq 0.6$ $0.2 < Q^2 < 75$	
μ	H_2, D_2	NMC	1995	$0.006 \leq x \leq 0.6$ $0.5 < Q^2 < 75$	307 ± 72

TAB. 2.2 – *Faisceau, cible et domaines cinématiques en* x *et* Q^2 *des principales expériences sur cible fixe. Elles se concentrent pour l'essentiel dans la région des grands* x *(*$x \geq 0.1$*) et permettent alors une détermination de* Λ_{QCD}*. On a écrit* $\Lambda^{(4)}_{QCD}$ *car il s'agit du* Λ_{QCD} *déterminé pour 4 saveurs de quarks : quand on passe de* n *à* $n+1$ *saveurs -lorsque* Q^2 *augmente- ,* Λ_{QCD} *est défini de telle sorte que* α_S *reste continue au passage du seuil; par suite,* Λ_{QCD} *dépend du nombre de saveurs. On discute dans la suite la technique et la qualité de la détermination de* $\Lambda^{(4)}_{QCD}$ *à grand* x*. De plus, ces expériences sont bien adaptées pour contraindre les distributions de quarks de valence dans cette région des* $x \geq 0.1$*.*

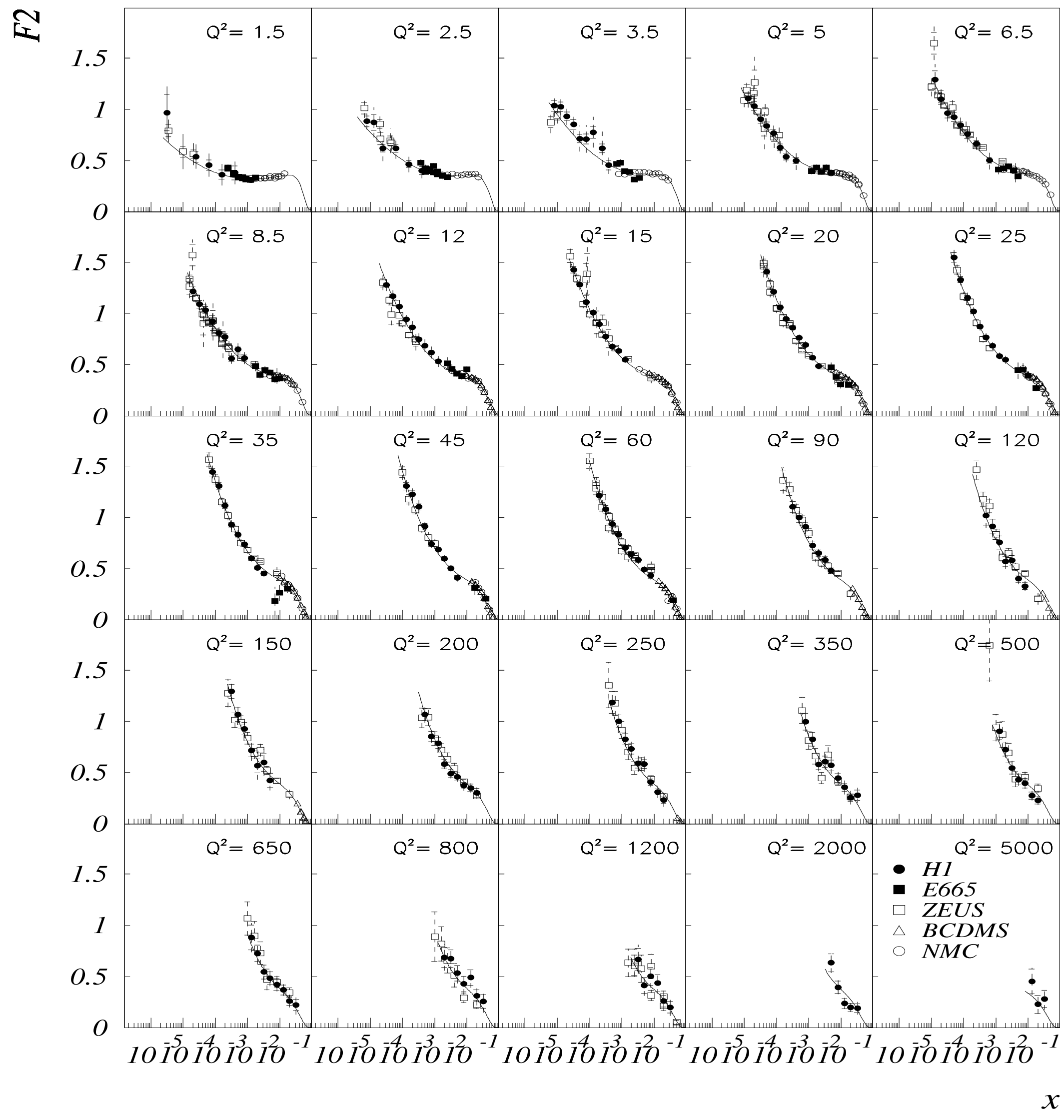


FIG. 2.11 – *Mesures de* $F_2^{ep}(x,Q^2(\text{ GeV }^2))$ *réalisées par les expériences H1 et ZEUS à HERA en 1994 et par trois expériences sur cible fixe (E665,NMC,BCDMS) (voir table 2.2 où l'on donne quelques éléments d'information concernant ces trois expériences). Pour les différentes expériences, les mesures rapportées sur cette figure et sur celles qui suivent couvrent les domaines cinématiques représentés sur la fig. 2.10. On rappelle la propriété remarquable que présentent ces données : une forte montée de* F_2 *à bas* x *et la montée est d'autant plus prononcée que* Q^2 *augmente. En trait plein on a représenté le résultat de l'ajustement QCD (DGLAP) calculé à l'approximation NLL(*Q^2*) par la collaboration H1 : on note le très bon accord de cet ajustement avec les données quel que soit* $Q^2 \geq 1.5$ GeV ^{2} *et pour tout le domaine en* x *(jusqu'à des valeurs minimales de* $x \sim 10^{-5}$*). La pertinence des équations d'évolution DGLAP semble alors incontestable. On discute ce dernier point dans un prochain chapitre.*

La cinématique de HERA par exemple, en s'étendant sur plusieurs ordres de grandeur dans la région des bas x, se superpose bien aux différents régimes d'évolution de QCD que l'on a exposés précédemment (voir fig. 2.9 et 2.10). Dans cette région, les données présentent un caractère remarquable : on observe en effet une forte montée de F_2 à bas x, de plus, cette montée est d'autant plus prononcée que Q^2 augmente.

♣ Comme nous l'avons montré, *le modèle BFKL*, dans la limite bas x et moyen Q^2 ($\alpha_S \ln \frac{1}{x} \simeq 1$ et $\alpha_S \ln(Q^2/Q_0^2) \ll 1$), prédit pour F_2 une dépendance en x de la forme :

$$F_2 = F^{\gamma g} \otimes f + F_2^{bf} \simeq \mathcal{C}(Q^2)\; x^{-\lambda_L} + F^{bf}$$

avec $\lambda_L = \left(\frac{3\alpha_S}{\pi}\right) 4 \ln 2$ ($\lambda_L \sim 0.32$ pour $\alpha_S = 0.12$). Cette prédiction s'accorde très bien avec les données des expériences pour $x \leq 0.1$ comme on le voit sur la fig. 2.12.

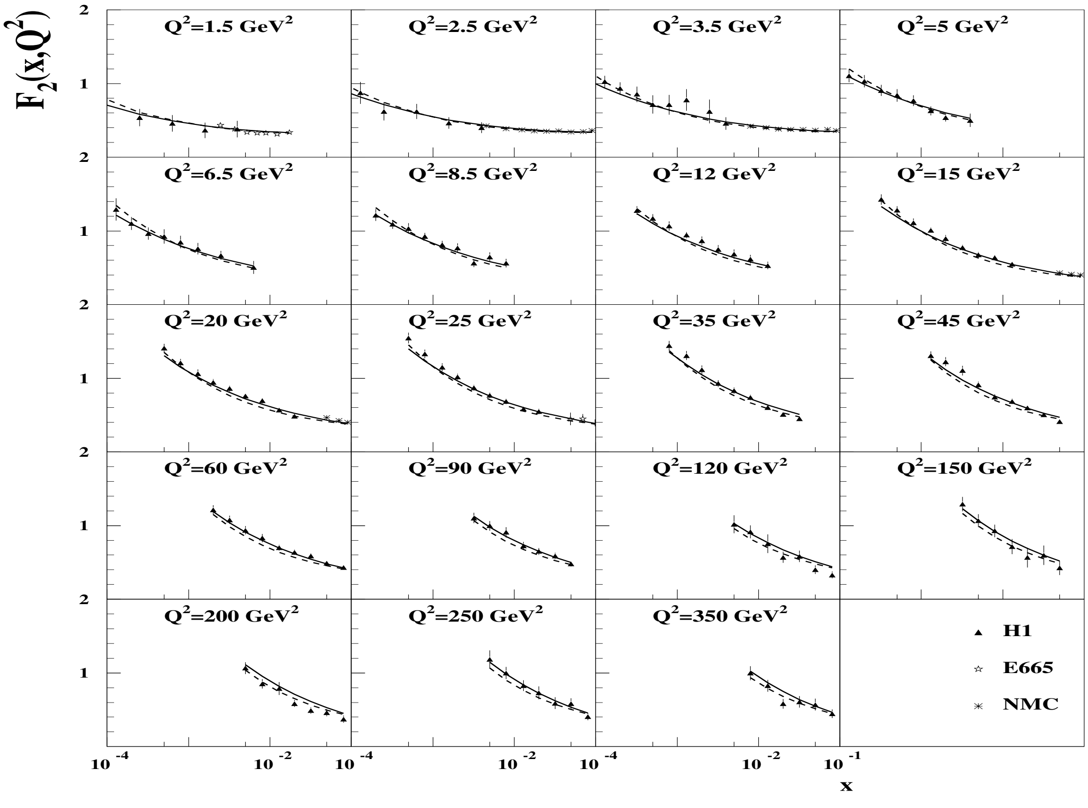


FIG. 2.12 – *Mesures de $F_2^{ep}(x, Q^2)$ à bas $x \leq 0.1$ auxquelles on a superposé les prédictions BFKL avec et sans contrainte cinématique imposée sur la sommation de l'échelle en k_T [23], représentées respectivement en trait continu et en trait discontinu. On note que l'accord données-prédictions reste bon jusqu'à $x \sim 0.1$.*

♣ De même, dans la limite bas x et grand Q^2 ($\alpha_S \ln \frac{1}{x} \simeq 1$ et $\alpha_S \ln(Q^2/Q_0^2) \sim 1$), la prédiction asymtotique des *équations DGLAP* -dans l'hypothèse d'une condition initiale non singulière- s'écrit :

$$F_2 \sim \exp \sqrt{4 \frac{3\alpha_S}{\pi} \ln \frac{Q^2}{Q_0^2} \ln \frac{1}{x}}$$

Elle s'accorde également très bien à la dépendance en x ainsi qu'à l'évolution en fonction de Q^2 observées pour les mesures de F_2. On peut vérifier cet accord à l'aide d'un modèle original proposé par Gluck, Reya et Vogt (GRV) [24]. Ces auteurs supposent des distributions initiales des quarks et gluons non singulières quand $x \to 0$ (ils supposent plus exactement que les $xq_i(x, Q_0^2)$ et $xg(x, Q_0^2)$ sont piquées autour de $x \sim 0.3$ et tendent vers 0 quand x tend vers 0 et 1). Ils montrent alors, qu'en évoluant ces distributions initiales avec $Q_0^2 \simeq 0.35$ GeV ^{2}, il est possible de reproduire avec une grande précision les résultats expérimentaux (voir fig. 2.13). Lorsque l'évolution en Q^2 est suffisamment longue, on est dans le cadre des hypothèses de la prédiction asymptotique DLL et les densités évoluées reproduisent donc exactement la prédiction asymptotique DLL. Ce modèle illustre, de plus, comment la dynamique de l'évolution en Q^2 des équations DGLAP permet de générer un comportement à bas x compatible avec les données, tout en supposant des conditions initiales sans divergence (à bas x).

Cette approche est ainsi une preuve que la dynamique des équations DGLAP est suffisante pour générer la montée de F_2 à bas x ($x \leq 0.1$), même si les conditions initiales ne contiennent pas cette propriété, ceci dès que l'évolution est suffisamment longue : par exemple, de $Q_0^2 \simeq 0.35$ GeV ^{2} à $Q^2 \geq 1.5$ GeV ^{2}.

En conclusion, si l'évolution en Q^2 des densités initiales de quarks et gluons par les équations DGLAP est suffisamment longue, alors la forte montée de F_2 à bas x est une conséquence de cette évolution ; nous avons souligné également que la dynamique BFKL reproduit bien les mesures de F_2 à bas x : nous développons précisément ces observations dans le chapitre 3.

Il est de plus possible de tester la pertinence des équations d'évolution DGLAP de manière plus fondamentale et de prédire de la sorte des formes analytiques pour les densités de quarks et gluons en fonction de x et Q^2, on parle alors d'ajustements QCD.

2.6.2 Ajustements QCD

Nous exposons ici les principes de base de cette méthode en prenant comme exemple l'ajustement QCD réalisé par H1 [18]. Nous présentons dans le chapitre 4 notre contribution à ce sujet : nous démontrons à cette occasion certaines propriétés importantes relatives à cette procédure et nous discutons alors de quelques questions ouvertes par les ajustements QCD et les perspectives que nous envisageons pour les résoudre.

Le but d'un ajustement QCD -de type DGLAP- est de vérifier si l'évolution en Q^2, prédite par les équations DGLAP (2.17), reproduit fidèlement les mesures de F_2^{ep} dans le domaine cinématique couvert par les différentes expériences (fig. 2.10), c'est-à-dire que, si l'on suppose une paramétrisation $F_2^{QCD}(x, Q_0^2)$ qui *s'ajuste* bien à la dépendance en x de F_2 mesurée pour cette valeur de Q_0^2 ($F_2^{exp}(x, Q_0^2)$), alors

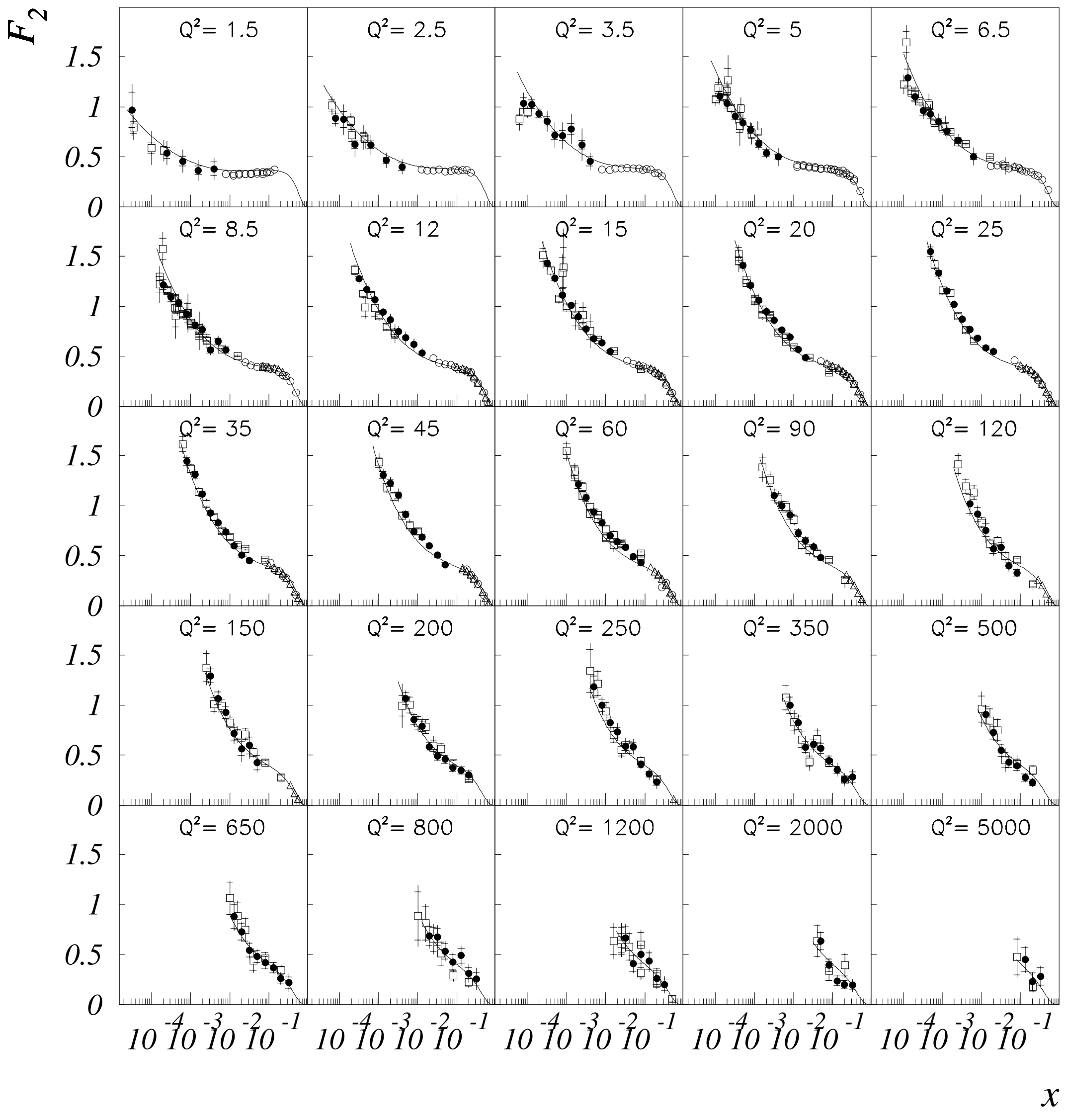


FIG. 2.13 – *Mesures de* $F_2^{ep}(x, Q^2(\text{ GeV }^2))$ *des expériences H1,ZEUS,NMC,BCDMS (symboles identiques à ceux de la fig. 2.11) et paramétrisation GRV. Le bon accord GRV/données est la preuve que la dynamique des équations DGLAP est suffisante pour générer la forte croissance de* F_2 *quand* x *diminue quelles que soient les conditions initiales supposées à très bas* Q^2 *(dans le domaine non-perturbatif). Par exemple, on observe sur cette figure que, pour des valeurs de* Q^2 *supérieures à* 1.5 GeV ^{2}*, la dynamique DGLAP (GRV) reproduit bien les données, il s'ensuit que la valeur de transition* Q^2_{NP} *entre le domaine perturbatif et le domaine de Regge est inférieure à* 1.5 GeV ^{2}.

l'évolution DGLAP de $F_2^{QCD}(x,Q_0^2)$ qui détermine $F_2^{QCD}(x,Q^2)$ pour un Q^2 donné doit bien *s'ajuster* à $F_2^{exp}(x,Q^2)$ -pour ce même Q^2-, ceci quel que soit Q^2.

On précise dans la suite ce qu'on entend par : *une paramétrisation s'ajuste bien aux données.*

Dans un premier temps, nous exposons les difficultés de principe que posent la détermination de la densité de gluons par la procédure d'ajustements QCD : on connait les équations DGLAP (2.17), que l'on peut également écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} Q^2\frac{\partial F_2(x,Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\left[\int_x^1 \frac{dz}{z}\left(\frac{x}{z}\right)P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right)F_2(z,Q^2)\right. \\ &\qquad \left. + 2\sum_q e_q^2\int_x^1\frac{dz}{z}\left(\frac{x}{z}\right)P_{qg}\left(\frac{x}{z}\right)zg(z,Q^2)\right] \qquad (2.48) \\ Q^2\frac{\partial g(x,Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}\left[\Sigma(z,Q^2)P_{gq}(\frac{x}{z}) + g(z,Q^2)P_{gg}(\frac{x}{z})\right] \qquad (2.49) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} F_2(x,Q^2) &\equiv x\sum_q e_q^2(q(x,Q^2)+\bar{q}(x,Q^2)) \\ x\Sigma(x,Q^2) &= x\sum_q(q(x,Q^2)+\bar{q}(x,Q^2)) \qquad (2.50) \end{aligned}$$

A l'approximation NLL(Q^2), on rappelle que l'expression de F_2 devient :

$$F_2(x,Q^2) = \int_x^1\frac{dy}{y}(\sum_i C_2^i(y,Q^2)\,q_i(x/y,Q^2) + C_2^g(y,Q^2)\,g(x/y,Q^2)) \qquad (2.51)$$

Tester l'évolution en Q^2 prédite par les équations (2.48) et (2.49) nécessite alors de connaître les conditions initiales : $F_2(x,Q_0^2)$, $x\Sigma(x,Q_0^2)$ et $xg(x,Q_0^2)$, mais aussi la valeur de Λ_{QCD} qui intervient dans l'expression de α_S (aux approximations LL(Q^2) et NLL(Q^2)) :

$$\alpha_S^0(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2N_f)\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}}}$$

$$\alpha_S(Q^2) = \alpha_S^0(Q^2)(1-\frac{102-\frac{38N_f}{3}}{(11-\frac{2N_f}{3})^2}\frac{\ln\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}}}{\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}}})$$

Dès lors, une première difficulté se présente, car, si les conditions initiales $F_2(x,Q_0^2)$ et $x\Sigma(x,Q_0^2)$ sont contraintes directement par les données expérimentales[3] , il n'en est pas de même pour $xg(x,Q_0^2)$ et Λ_{QCD}.

Il est alors judicieux de chercher à décomposer ce problème à deux inconnues -non contraintes- en deux sous-problèmes chacun avec une inconnue -non contrainte-. On utilise pour cela les propriétés des fonctions de splitting (P_{ij}) :

---

[3] On suppose des paramétrisations pour les distributions $xq(x,Q_0^2)$ et $x\bar{q}(x,Q_0^2)$, d'où une paramétrisation pour $F_2(x,Q_0^2)$ -laquelle est contrainte directement par $F_2^{exp}(x,Q_0^2)$- , ensuite $x\Sigma(x,Q_0^2)$ est calculée avec ces mêmes distributions ($xq(x,Q_0^2)$ et $x\bar{q}(x,Q_0^2)$).

On peut alors simplifier l'équation (2.48) dans deux limites distinctes qui assurent la décomposition recherchée :

- Quand $x \to 1$, le premier terme (en $P_{qq} \otimes F_2$) domine et l'équation (2.48) devient :

  $$Q^2 \frac{\partial F_2(x,Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \left[\int_x^1 \frac{dz}{z} \left(\frac{x}{z}\right) P_{qq} \left(\frac{x}{z}\right) F_2(z,Q^2) \right] \tag{2.52}$$

  L'inconnue restante est alors Λ_{QCD}. Les expériences où cette approximation ($x \to 1$) est légitime sont les expériences sur cible fixe (table 2.2). Il est alors possible de déterminer Λ_{QCD} avec précision comme nous le montrons dans dans la suite.

- Quand $x \to 0$, le deuxième terme (en $P_{qg} \otimes xg$) domine et l'équation (2.48) devient :

  $$Q^2 \frac{\partial F_2(x,Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \left[2 \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} \left(\frac{x}{z}\right) P_{qg} \left(\frac{x}{z}\right) zg(z,Q^2) \right] \tag{2.53}$$

  L'inconnue restante est alors $xg(x,Q_0^2)$ si Λ_{QCD} est déterminé au préalable dans la limite $x \to 1$. Cette approximation (équation (2.53)) peut également être utilisée pour déterminer directement $xg(x,Q^2)$ à partir de la violation d'invariance d'échelle mise en évidence sur les données de F_2 à bas x.

Nous présentons maintenant la procédure d'ajustements QCD pour les équations DGLAP (2.17) en supposant pour Λ_{QCD} la valeur trouvée par les expériences sur cible fixe dans l'approximation $x \to 1$, $\Lambda^{(4)}_{QCD} = 263$ MeV (± 42 MeV) [25]. La problématique que nous avons exposée précédemment nous montre que cet ajustement permet alors une détermination indirecte de la densité de gluons [26, 27].

- On définit les conditions initiales pour $Q_0^2 = 5$ GeV ^{2} :

  $$\begin{aligned} xg(x,Q_0^2) &= A_g x^{B_g} (1-x)^{C_g} \\ xu_v(x,Q_0^2) &= A_u x^{B_u} (1-x)^{C_u} (1 + D_u x + E_u \sqrt{x}) \\ xd_v(x,Q_0^2) &= A_d x^{B_d} (1-x)^{C_d} (1 + D_d x + E_d \sqrt{x}) \\ xS(x,Q_0^2) &= A_\Sigma x^{B_S} (1-x)^{C_S} (1 + D_S x + E_S \sqrt{x}) \end{aligned} \tag{2.54}$$

  - xu_v, xd_v représentent les distributions des quarks de valence u et d -antisymétriques de saveur (non singlets)-, soit :
    $xu_v = xq_{NS}^{(u)} = xu - x\bar{u}$ et $xd_v = xq_{NS}^{(d)} = xd - x\bar{d}$.
  - xS représente la distribution des quarks de la mer -pour les saveurs u, d- qui est une distribution symétrique de saveur (singlet), $xS = x\bar{u} + x\bar{d}$ ($\bar{u} = \bar{d}$). Le quark s est pris en compte avec : $xs = x\bar{s} = xS/4$.
  - A_α,B_α,C_α,D_α, E_α sont des paramètres réels auxquels on a donné dans un premier temps des valeurs arbitraires -raisonables-.

- On résoud les équations (2.17) à l'approximation NLL(Q^2) avec les conditions initiales (2.54) et les valeurs supposées pour les paramètres A_α, B_α,C_α,D_α,E_α, Λ_{QCD} étant fixé ($\Lambda^{(4)}_{QCD} = 263$ MeV), soit $\alpha_S(M_Z^2) = 0.113$. On verra au chapitre 4 comment ces équations peuvent être résolues.
  On en déduit $xu_v(x,Q^2)$,$xd_v(x,Q^2)$,$xg(x,Q^2)$,$xS(x,Q^2)$ pour différentes valeurs de Q^2. Dans la procédure exposée ici, seules trois saveurs (u,d,s) sont prises en compte, par suite l'évolution DGLAP est réalisée sur ces trois saveurs uniquement. De plus, lors de l'évolution, les relations suivantes sont imposées :

$$B_u = B_d \qquad \int_0^1 u_v(x)dx = 2 \qquad \int_0^1 d_v(x)dx = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n_f}\int_0^1 x(q_i+\bar{q}_i+g)dx = 1$$

- La fonction de structure F_2 est ensuite calculée :

$$\begin{aligned} F_2^{QCD}(x,Q^2) &\equiv \left[\frac{11}{18}xS + \frac{4}{9}xu_v + \frac{1}{9}xd_v + F_2^{c\bar{c}}\right](x,Q^2) \\ F_2^{c\bar{c}}(x,Q^2) &= 2e_c^2\frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\int_{ax}^1 \frac{dy}{y}xC_2^{c,g}(\frac{x}{y},\frac{m_c^2}{Q^2})g(y,Q^2) \end{aligned} \qquad (2.55)$$

  avec $a = 1 + \frac{4m_c^2}{Q^2}$ et $C_2^{c,g}$ une fonction connue.

- Une fois $F_2^{QCD}(x,Q^2)$ évoluée et calculée pour chaque valeur de $Q^2 = Q_i^2$ pour laquelle existent des points expérimentaux $F_2^{exp}(x_j,Q_i^2)$, on considère la fonction suivante :

$$\chi^2 = \sum_{i,j}\frac{(F_2^{exp}(x_j,Q_i^2) - F_2^{QCD}(x_j,Q_i^2))^2}{\sigma^2_{stat}} \qquad (2.56)$$

  où chaque $F_2^{exp}(x_j,Q_i^2)$ est une valeur expérimentale et σ_{stat} son erreur statistique. χ^2 est une fonction -somme sur tous les points expérimentaux- qui dépend des paramètres A_α,B_α, C_α,D_α,E_α et il existe un ensemble de valeurs pour ces paramètres qui minimise cette fonction χ^2.

  La procédure ainsi décrite est alors répétée, en modifiant la valeur des paramètres à chaque itération, jusqu'à ce que la valeur minimale de χ^2 soit atteinte[4]. L'ensemble des points expérimentaux considérés dans l'ajustement de la collaboration H1 (fig. 2.11) comprend également les points expérimentaux de NMC et BCDMS plus appropriés pour contraindre les distributions -de valence- à grand x ($x \geq 0.1$) (voir table 2.2). De plus, pour minimiser le χ^2, seul le sous-ensemble des mesures de F_2 vérifiant $Q^2 \geq 5$ GeV ^{2} et $Q^2 \geq 15$ GeV ^{2} si $x \geq 0.5$ a été utilisé.

  L'ajustement de H1 présente également quelques autres spécificités techniques non essentielles à la compréhension de la procédure ; par exemple, le jeu de données utilisées comprend des mesures électron-proton mais aussi électron-deutérium, les normalisations des différentes expériences sont ajustées moyennant certaines limites.

---

[4] La fonction χ^2 donne un sens à la proposition : *une paramétrisation $\mathcal{P}$ s'ajuste bien aux données.* En effet, minimiser le χ^2 par rapport à l'ensemble des paramètres de $\mathcal{P}$ signifie ajuster de mieux en mieux la paramétrisation $\mathcal{P}$ aux données.

A_g	B_g	C_g			A_u	B_u	C_u	D_u	E_u
2.24	−0.20	8.52			2.84	0.55	4.19	4.42	−1.40
A_S	B_S	C_S	D_S	E_S	A_d	B_d	C_d	D_d	E_d
0.27	−0.19	1.66	0.16	−1.00	1.05	0.55	6.44	−1.16	3.87

TAB. 2.3 – *Valeurs des paramètres à* $Q^2 = 5$ GeV ^{2} *déterminées par l'ajustement QCD.*

> Nous revenons précisément dans un chapitre ultérieur sur l'ensemble de la pratique des ajustements QCD.

On remarque sur la fig. 2.11 la très bonne description des données par l'ajustement QCD sur tout le domaine expérimental pour $Q^2 \geq 1.5$ GeV ^{2} (voir fig. 2.10). De ce point de vue, on peut dire que les données ne présentent aucune indication d'un passage dans le régime des bas x (BFKL-GLR) ni d'une transition vers le domaine de Regge.

L'ajustement QCD ainsi effectué fournit, de plus, des valeurs pour les paramètres A_α, B_α,C_α,D_α,E_α (voir table 2.3) ; il fournit donc des paramétrisations bien définies pour les distributions de quarks de valence, de la mer et pour la distribution de gluons.

On montre sur la fig. 2.14 la distribution de gluons déduite de l'ajustement de la collaboration H1 pour 2 valeurs différentes de Q^2 [18]. On peut noter que la distribution de gluons $xg(x, Q^2)$ ainsi calculée -de manière indirecte- présente les mêmes caractères que la fonction de structure -directement mesurée- $F_2(x, Q^2)$: *une forte montée à bas x, d'autant plus forte que Q^2 augmente.*

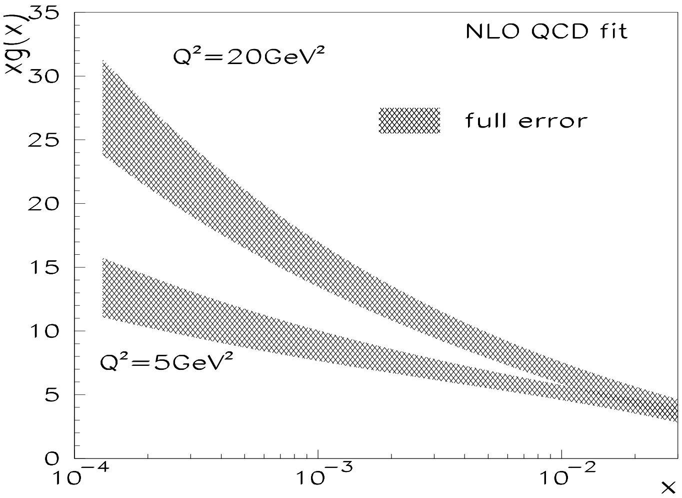


FIG. 2.14 – *Densité de gluons $xg(x)$ à $Q^2 = 5GeV^2$ et $Q^2 = 20GeV^2$ déduite d'un ajustement QCD à l'approximation NLL(Q^2) des mesures de F_2 par les expériences H1 (1994), NMC et BCDMS pour* $Q^2 \geq 5$ GeV ^{2}. *(on écrit souvent NLO pour NLL(Q^2) et LO pour LL(Q^2)). La bande hachurée représente l'erreur expérimentale complète.*

2.7 Comportement de F_2 à bas Q^2

Les ajustements QCD ont permis de vérifier la validité de la QCD perturbative sur tout le domaine couvert par les expériences pour $Q^2 \geq 1.5$ GeV ^{2} et, pour ce domaine, on a montré que les équations d'évolution DGLAP décrivent parfaitement les données. Maintenant, que se passe-t-il à bas Q^2 : $Q^2 \leq 1.5$ GeV ^{2}?

Pour $Q^2 \sim 0$ GeV ^{2}, notre discussion de la diffusion inélastique profonde ne s'applique évidemment plus et les événements correspondant à ces valeurs de $Q^2 \sim 0$ GeV ^{2} sont appelés : *événements de photoprodution* (production de photons réels). En fait, la section efficace d'un tel événement étant mille fois plus élevée que celle d'un événement de diffusion inélastique profonde, la majeure partie des événements observés à HERA correspond à des événements de photoproduction où un photon quasi-réel interagit avec le proton, l'électron n'étant pratiquement pas diffusé. L'étude de ces événements a pour objet la compréhension du régime de transition entre la physique "dure" (domaine perturbatif de la QCD) et la physique "molle" (à $Q^2 \to 0$, quand on tend vers le domaine non-perturbatif). Pour ce faire, des études de production de mésons vecteurs (ρ et J/ψ par exemple) ont été réalisées [28]. Par ailleurs, ces événements de photoproduction permettent d'étudier la structure en quarks et en gluons du photon.

Pour ce qui concerne notre discussion, nous allons étudier ce régime de transition *perturbatif non-perturbatif* par le biais des fonctions de structure. Pour cela, il est nécessaire de mesurer F_2 pour $Q^2 \leq 1.5$ GeV ^{2} ; nous revenons dans le développement de notre analyse sur ces mesures et sur leur interprétation physique.

La fig. 2.15 présente les résultats obtenus par ZEUS, E665,NMC dans cette région, ainsi que les mesures de H1 pour $Q^2 \geq 1.5$ GeV ^{2}.

On distingue nettement sur cette figure la transition entre le régime de Regge -non perturbatif- pour $Q^2 \leq 0.57$ GeV ^{2} [16, 17] et le régime perturbatif pour $Q^2 \geq 1.5$ GeV ^{2} [24]. On peut alors évaluer la valeur de transition Q^2_{NP} entre ces deux régimes : $Q^2_{NP} \sim [0.57, 1.5]$ GeV ^{2}.

Les modèles de type Regge prédisent aussi les comportements des fonctions de structure pour $Q^2 \to 0$ GeV ^{2} :

$$F_2(x, Q^2 \to 0) = \mathcal{O}(Q^2) \tag{2.57}$$

$$F_L(x, Q^2 \to 0) = \mathcal{O}(Q^4) \tag{2.58}$$

Ces propriétés sont importantes et nous y revenons au chapitre 7.

2.8 Combien y a-t-il de quarks dans le proton?

Tous les développements précédents ont un objectif unique : *comprendre la structure interne du proton.* Dès lors, il est légitime de se demander s'ils nous renseignent sur la composition en *quarks* du proton. Le nombre de quarks N peut être évalué comme suit :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} F_2(x) \simeq \frac{2}{9} N \tag{2.59}$$

Les mesures actuelles nous permettent d'intégrer effectivement cette équation pour $x \subset [\sim 10^{-4}, 1]$, ce qui donne un ordre de grandeur typique $N \sim 30$ qui augmente très rapidement si la borne inférieure de x diminue.

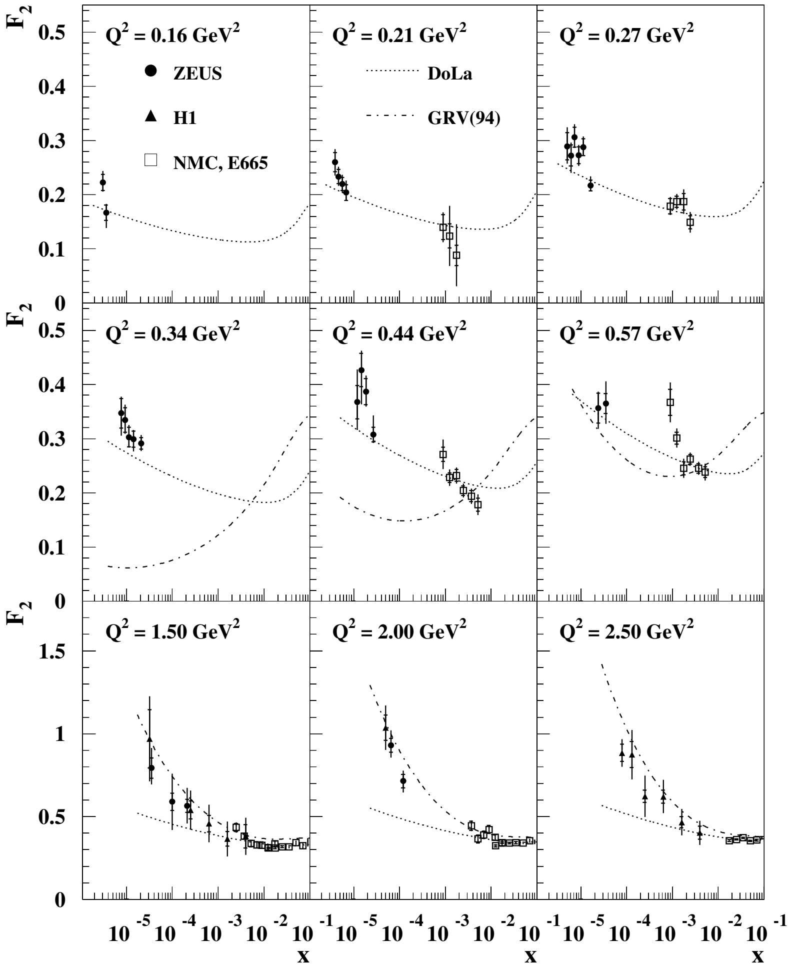


FIG. 2.15 – *Mesures de $F_2^{ep}(x,Q^2)$ à bas Q^2. Les points expérimentaux de ZEUS (1994 et 1995 -BPC-), H1(1994) , NMC et E665 (voir fig. 2.10) sont représentés sur cette figure, ils sont comparés aux prédictions du modèle de Regge revues par Donnachie et Landshoff (DoLa) [16, 17] ainsi qu'à la paramétrisation de GRV [24]. On distingue nettement la transition entre le régime de Regge -non perturbatif- pour* $Q^2 \leq 0.57$ GeV ^{2} *et le régime perturbatif pour* $Q^2 \geq 1.5$ GeV ^{2}*, pour lequel la prédiction GRV présente un bon accord avec les données (voir texte).*

Alors, pourquoi 3 *quarks-constituants uud* et un si grand nombre N de *quarks-partons*?

On énonce ici quelques propriétés qui mettent en évidence les différences entre ces deux types d'objets. Elles présentent le grand intérêt de répondre directement à notre volonté de comprendre la structure interne du proton et d'éclairer ainsi notre discussion précédente [29, 30].

- Les quarks-constituants sont des objets étendus avec un rayon de l'ordre de $0.2 - 0.3 fm$, les quarks-partons sont ponctuels.
- Les masses de quarks-constituants sont de l'ordre de 350 MeV (pour u et d), pour les quarks-partons on a pour u et d:
  $m_u = 4 MeV \quad m_d = 7$ MeV .
- Les quarks-constituants sont faiblement liés pour former les hadrons, les quarks-partons sont asymptotiquement libres.
- Le couplage effectif aux gluons des quarks-constituants est faible malgré l'échelle d'énergie relativement basse qui les caractérisent, le couplage des quarks-partons entre eux et aux gluons est perturbatif et est contrôlé par α_S.

La progression *quarks-partons* → *quarks-constituants* → *proton* est encore mal connue; on peut supposer par exemple un modèle *nucléaire* pour le proton pour lequel les quarks-partons seraient essentiellement concentrés dans les quark-constituants, ce qui donne alors une définition univoque de ces derniers.

On peut prolonger ce modèle de type nucléaire en donnant une interprétation qualitative de l'énergie de liaison des quarks-constituants dans le proton. Pour 2 quelconques des 3 quarks-constituants il est possible de définir une énergie potentielle effective d'interaction qui a la forme:

$$V(r) \simeq \frac{a}{r} + br \tag{2.60}$$

où r est la distance entre les 2 quarks, a est une constante positive, pour les quarks ayant même charge électrique, et b est une constante positive qui traduit le caractère attractif de l'interaction. La force entre les 2 quarks est alors:

$$F = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} \simeq \frac{a}{r^2} - b \tag{2.61}$$

qui devient nulle pour $r_0 = \sqrt{\frac{a}{b}}$ avec une valeur de l'énergie potentielle $V(r_0) = 2\sqrt{ab}$, cette valeur est positive, ce qui donne une énergie d'équilibre aux système des 2 quarks en interaction plus élevée que la somme de leurs masse-energies: on obtient ainsi une évaluation -analytique- de l'énergie de liaison. Ce calcul se généralise ensuite au système des 3 quarks-constituants en interaction. La QCD prédit en fait que b décroît à petit r (liberté asymptotique) et croît à grand r (confinement), mais reste constante sur un large intervalle de r, ce qui justifie l'approximation ci-dessus.

2.9 Evénements diffractifs

L'examen des événements de diffusion profondément inélastique -en courant neutre- a montré [31] qu'environ 10% de ces événements ne présentaient aucun dépôt d'énergie dans la partie avant du détecteur, direction des protons incidents (alors qu'on s'attend à trouver un peu d'énergie déposée par les résidus du proton). De tels événements sont appelés *événements à grand intervalle de rapidité*, ou encore *événements diffractifs*. Un événement de diffusion inélastique profonde standard ainsi qu'un événement diffractif typique, observés dans le détecteur H1, sont représentés sur la fig. 2.16.

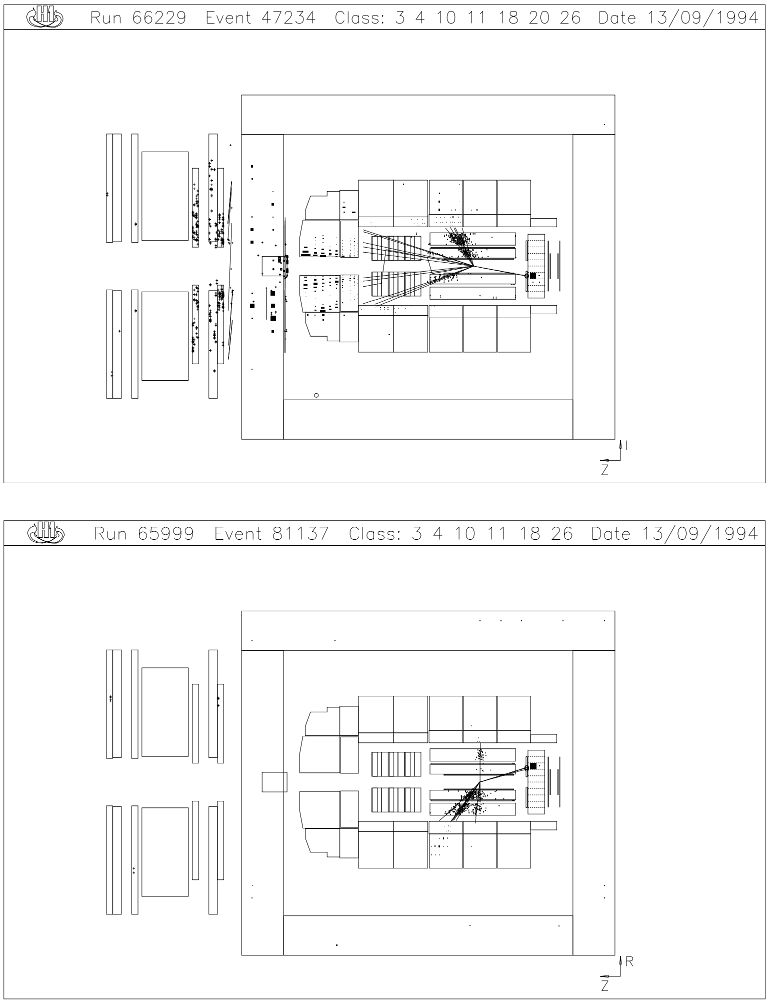


FIG. 2.16 – *Evénements de diffusion profondément inélastique -en courant neutre- "ordinaire" (en haut) et diffractif (en bas), observés dans le détecteur H1. Les électrons incidents arrivent par la gauche, les protons par la droite.*

De tels événements peuvent s'expliquer si on suppose que le lepton incident et le proton interagissent via l'échange d'un objet non coloré, de telle sorte qu'il n'y ait pas de connection de couleur entre le résidu du proton et le (ou les) jet(s) de l'événement.

Il existe à l'heure actuelle trois modèles qui permettent de rendre compte de tels événements :

- Le premier modèle suppose l'existence d'une particule *blanche* et de moment cinétique $J = 1$, le poméron. Ce modèle est dérivé des théories de Regge [16] et le poméron mis en jeu est *un poméron de type Regge*[5].

- Le second modèle suppose également l'existence d'une particule *blanche* appelée poméron ; cependant, ce dernier est décrit par la QCD perturbative où l'échange d'une structure *blanche* se fait à partir d'une échelle de gluons de type BFKL : une telle échelle constitue ce qu'on appelle un *Poméron de type BFKL*.

- Le troisième modèle invoque un nouveau type d'hadronisation, reposant sur des échanges de gluons mous entre les partons du sous-processus hadronique et le proton.

Actuellement, la statistique est encore insuffisante pour que les études menées à HERA sur ce sujet [32] puissent exclure l'un ou l'autre de ces modèles.

2.10 La recherche de nouvelles particules

Dans le cadre de la physique au-delà du modèle standard, plusieurs études sont menées :

- la recherche de leptoquarks (bosons scalaires ou vectoriels) apparaissant dans plusieurs modèles étendant le modèle standard (ce sont les bosons fondamentaux de $SU(5)$ par exemple, mais ils apparaissent aussi dans des modèles composites ou de technicouleur, et dans certains modèles de supercordes). Se couplant à un lepton et un quark, ils peuvent être produits naturellement à HERA par fusion entre le positron (ou l'électron) incident et un quark venant du proton ;

- la recherche d'électrons ou de quarks excités, particules prédites par les modèles composites, qui tentent d'expliquer l'organisation des fermions en familles. Les recherches menées jusquà présent [33, 34] n'ont pas permis d'observer un signal ;

- la recherche de particules supersymétriques. Les analyses actuelles à HERA concernent essentiellement des modèles où la *R-parité*, un nouveau nombre quantique introduit en supersymétrie, n'est pas conservée [35]. L'étude de processus conservant la *R-parité* est récente [36] car elle nécessite une luminosité importante ;

---

[5] Dans le plan complexe (J, t) des trajectoires de Regge où J est le moment cinétique -complexe- et t le 4-moment transféré, toutes les trajectoires semblent couper l'axe J à l'origine ($t = 0$) pour des valeurs de J inférieures à 1 ; il doit exister une trajectoire d'ordonnée à l'origine 1. C'est *la trajectoire de Poméranchuk*, décrite par une particule imaginaire, *le poméron*.

- les recherches de physique au-delà du modèle standard à HERA ont permis essentiellement de donner des limites d'exclusion pour certains phénomènes exotiques. Cependant, l'observation d'un *excès* d'événements à grand Q^2 ($Q^2 >$ 15000 GeV ^{2}) par les collaborations H1 et ZEUS [37] a peut-être donné un premier indice d'une nouvelle physique qui ouvre un champ nouveau pour des mesures et analyses ultérieures. La poursuite de ce type d'étude dira si cet *excès* est une fluctuation statistique ou bien un réel écart au modèle standard [38, 39].

2.11 Conclusions et perspectives

La diffusion profondément inélastique $e-p$ est un régime idéal pour sonder la structure du proton et réaliser des mesures précises de la fonction de structure $F_2^{ep}(x,Q^2)$. L'évolution de cette fonction est bien contrainte théoriquement, en Q^2 pour l'approche DGLAP (grands Q^2), et en x pour l'approche BFKL (bas x). Nous avons présenté quelques éléments d'analyse de ces différentes équations d'évolution et nous avons montré que :

- Les données ne présentent aucune indication d'un passage dans le régime BFKL pour tout x compris dans l'intervalle $[10^{-5}, 1]$, les équations d'évolution DGLAP s'accordant parfaitement avec les mesures sur tout le domaine de validité de la QCD perturbative. Nous avons vu cependant que l'approche BFKL s'ajuste également très bien aux mesures pour $x \leq 0.1$, moyennant l'addition *ad hoc* d'un terme non-perturbatif.

- Nous avons alors étudié la transition entre le régime de Regge et le régime perturbatif pour estimer la valeur de transition Q^2_{NP} entre ces deux régimes ($Q^2_{NP} \sim 1$ GeV ^{2}).

Les perspectives de cette présentation sont nombreuses. De plus, des faits expérimentaux nouveaux peuvent en modifier la nature. Nous pouvons cependant donner ici des principales pistes que nous développons dans la suite :

- Il est important d'évaluer expérimentalement quelle image de physique -DGLAP ou BFKL- est la plus appropriée sur le domaine cinématique couvert par HERA à bas x ; cette étude devrait permettre de déterminer également l'ordre de grandeur de la variable x lors de la transition entre ces deux régimes (x_{BFKL}), si une telle transition existe et est accessible avec les expériences actuelles. Une transition vers un régime de saturation de type GLR est également à prendre en considération. Nous n'excluons pas par ailleurs d'introduire de nouvelles idées théoriques pour mener à bien cette analyse.

- Il est nécessaire de *perfectionner* la procédure d'ajustements QCD pour réaliser des tests de précision des équations DGLAP, et, parallèlement, il est important d'analyser de nouvelles données de l'expérience en diminuant les erreurs de mesure. Nous espérons ainsi déterminer Λ_{QCD} et les distributions des partons dans le proton avec une grande précision, ce qui répond à notre volonté de sonder et comprendre la structure interne du proton. *L'interdépendance de ces deux enjeux (ajustements QCD et mesures) est par ailleurs une parfaite illustration d'une démarche scientifique raisonnée.* De plus, cette étude doit permettre de tester avec précision l'hypothèse de factorisation : en effet, la section efficace d'interaction électron-proton (ou électron-deutérium) peut s'écrire symboliquement comme une convolution d'un facteur de flux de la sonde bosonique par une densité de parton et par la section efficace élémentaire d'interaction sonde-parton, $\sigma \sim \mathcal{F}_{sonde} \otimes f_{parton} \otimes \tilde{\sigma}$. Cependant, cette écriture reste une hypothèse qu'il convient de vérifier dans chaque cas, nous la discutons dans la suite de notre analyse.

- Une compréhension plus approfondie de la *transition perturbatif-non perturbatif* est également une perspective importante pour la suite de notre analyse.

Bibliographie

[1] R.P. Feynman, *Photon-Hadron Interactions* (W.A. Benjamin Co., New York, 1972).

[2] J.D. Bjorken, *Phys.Rev.* **179** (1969) 1547.
J.D. Bjorken, A. Paschos, *Phys.Rev.* **185** (1969) 1975.

[3] B.L. Ioffe, *Phys.Lett.* **30** (1969) 123.

[4] V.N.Gribov et L.N.Lipatov, *Sov. Jour. Nucl. Phys.* **15** (1972) 438. et 675 ;
G.Altarelli et G.Parisi, *Nucl. Phys.* **126** (1977) 297 ;
Yu.L.Dokhshitzer, *Sov. Phys. JETP* **46** (1977) 641 ;
G.Parisi, *Rencontres de Moriond* (1976).

[5] C.G. Callan, *Phys.Rev.* **D2** (1970) 1541 ;
K. Symanzik, *Comm. Math. Phys.* **18** (1970) 227.

[6] G. Curci, W. Furmański, R. Petronzio, *Nucl.Phys.* **B175** (1980) 27 ;
W. Furmański, R. Petronzio, *Phys.Lett.* **B97** (1980) 437 ;
E.G. Floratos, C. Kounnas, R. Lacaze, *Phys.Lett.* **B98** (1981) 89.

[7] H. Georgi, H.D. Politzer, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 416.

[8] D.J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 980.

[9] E.A.Kuraev, L.N.Lipatov et V.S.Fadin, *Phys. Lett.* **B60** (1975) 50 ; *Zh. Eksperiment. I. Teor.Fiz.* **72** (1977) 377 ;
Y.Y.Balitsky et L.N.Lipatov, *Sov. Jour. Nucl. Phys.* **28** (1978) 822.

[10] L.V.Gribov, E.M.Levin et M.G.Ryskin, *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 555 ; *Phys. Rep.* 100 (1983).

[11] K. Golec-Biernat, M.W. Krasny et S. Riess, *Phys. Lett.* **B337** (1994) 367.

[12] A. De Rujula et al., *Phys. Rev.* **D40** (1974) 1649.

[13] R.D. Ball, S. Forte, *Phys. Lett.* **B351** (1995) 313.

[14] C. López et F.J. Ynduráin, *Nucl. Phys.* **B 171** (1980) 231 ; *Nucl. Phys.* **B 183** (1981) 157 ;
C. López, F. Barreiro et F.J. Ynduráin, *DESY-96-087* (1996).

[15] J. Kwiecinski, *Schladmig Winter School*, Report 1620/PH, IFJ Cracow (1993).

[16] A. Donnachie et P.V. Landshoff, *Phys. Lett.* **B296** (1992) 227 ; *Z. Phys.* **C61** (1994) 139.

[17] A. Capella et al., *Phys. Lett.* **B337** (1994) 358.

[18] H1 Collaboration, S. Aid et al., *Nucl. Phys.* **B470** (1996) 3.

[19] ZEUS Collaboration, M. Derrick et al., *DESY preprint* 96-076 and *Z. Phys.* **C69** (1996) 607.

[20] E-665 FNAL Collaboration, M.R. Adams et al., *FNAL-Pub-95/396-E* (1995).

[21] NMC Collaboration, M. Arneodo et al., *Phys. Lett.* **B364** (1995) 107.

[22] BCDMS Collaboration, A.C. Benvenuti et al., *Phys. Lett.* **B223** (1989) 485.

[23] J. Kwiecinski, A.D. Martin et A.M. Stasto *Durham preprint DTP/97/18* (1997).

[24] M. Glück, E. Reya et A.Vogt, *Z.Phys.* **C53** 127 (1992) ; *Phys. Lett.* **B306** (1993) 391 ; *Z. Phys.* **C67** (1995) 433.

[25] M. Virchaux, A. Milsztajn, *Phys. Lett.* **B 274** (1992) 221.

[26] H1 Collaboration, S. Aid et al., *Phys. Lett.* **B354** (1995) 494.

[27] ZEUS Collaboration, M. Derrick et al., *Phys. Lett.* **B345** (1995) 576.

[28] H1 Collaboration, S. Aid et al., *DESY 95-251*, à paraître dans *Nucl. Phys. B*; H1 Collaboration, S. Aid et al., *DESY 96-37*, à paraître dans *Nucl. Phys. B.*

[29] J.D. Bjorken *SLAC-PUB-95-6949* (1995).

[30] B.R. Holstein *Am. J. Phys.* **63-1** 1994.

[31] H1 Collaboration, T. Ahmed et al., *Nucl. Phys.* **B429** (1994) 477.

[32] H. Jung, *Proceedings of the Workshop on Deep Inelastic Scattering and QCD*, Paris, (1995), ed. J.F. Laporte et Y. Sirois.

[33] H1 Collaboration, T. Ahmed et al., *Phys. Lett.* **B340** (1994) 205.

[34] ZEUS Collaboration, M. Derrick et al., *Z. Phys.* **C65** (1995) 627.

[35] H1 Collaboration, T. Ahmed et al., *Z. Phys.* **C64** (1994) 545.

[36] H1 Collaboration, S. Aid et al., *Contribution à l'International Europhysics Conference on High Energy Physics*, 27 Juil.-2 Aout 1995 Bruxelles, EPS-0463.

[37] H1 Collaboration, *Zeit. Phys.* **C74** (1997) 191 ;
ZEUS Collaboration, *Zeit. Phys.* **C74** (1997) 207.

[38] G. Altarelli, J. Ellis, G.F. Giudice, S. Lola, M.L. Mangano, *CERN-TH-97-40* (1997).

[39] S. Kuhlmann,H.L. Lai, W.K. Tung *MSU-HEP-70316* (1997).

Chapitre 3

LA MONTEE DE F_2 A BAS X INTERPRETATION

Nous allons étudier dans ce chapitre le fait expérimental remarquable présenté par la fonction de structure $F_2(x,Q^2)$ à bas x : *forte montée à bas x, d'autant plus forte que Q^2 augmente.* Le chapitre précédent fait déjà référence à quelques éléments de réponse quant à l'interprétation de cette propriété. Nous avons montré en effet qu'une approche de type BFKL, de même que le développement asymptotique des équations DGLAP, prédisent cette propriété. La procédure d'ajustements QCD nous a appris également que les équations DGLAP reproduisent parfaitement l'évolution en Q^2-*montée d'autant plus forte que Q^2 augmente*-. Cependant, les arguments et résultats précédents ne nous ont pas permis de *discriminer* entre les deux approches BFKL ou DGLAP à bas x (par exemple $x \leq 0.1$). Or, ces deux approches sous-tendent des images physiques différentes qui peuvent difficilement être *réalisées* en même temps. Il est alors important de trouver un estimateur qui permette de quantifier précisément la montée de $F_2(x,Q^2)$ à bas x et qui permette ensuite de montrer, moyennant une précision expérimentale suffisante, quelle image physique est la plus appropriée pour décrire la propriété qui nous intéresse dans ce chapitre. C'est le programme que nous allons suivre : trouver un estimateur puis montrer dans quelle mesure ce dernier est discriminant des prédictions de la QCD : nous présentons ainsi une résolution originale des équations d'évolution de la QCD perturbative.

3.1 Caractérisation

Une façon naturelle de caractériser la forte montée de $F_2(x,Q^2)$ à bas x, pour $x \subset [10^{-5}, 0.1]$, est de réaliser des ajustements de la forme $F_2 \propto x^{-\lambda}$ pour chaque Q^2 et pour $x \leq 0.1$ [1, 2], alors :

$$\lambda(Q^2) = \left\langle \frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln \frac{1}{x}} \right\rangle_{x \leq 0.1} (Q^2) \tag{3.1}$$

L'estimateur $\lambda(Q^2)$ est bien défini et la procédure d'extraction de celui-ci est *légitime* : en effet, quel que soit Q^2, on peut montrer que la dépendance en x de l'observable $\frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln \frac{1}{x}}$ est marginale pour $x \leq 0.1$: la précision actuelle des données ne permet d'être sensible à cette dépendance (voir fig. 3.1). Ainsi, l'estimateur $\lambda(Q^2)$, défini ci-dessus, ne dépend pas de la borne inférieure en x de l'ajustement $F_2 \propto x^{-\lambda}$, soit $\lambda_{x_{inf}}(Q^2) = \left\langle \frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln \frac{1}{x}} \right\rangle_{x \subset [x_{inf}, 0.1]} (Q^2)$ est indépendant de x_{inf}. C'est dans ce sens que l'on dit que la procédure ainsi décrite est *légitime*.

On présente sur la fig. 3.2 le résultat de ces ajustements pour les données de H1 [1, 2], nous avons ainsi quantifié notre proposition d'étude :

- *forte montée à bas x* : $\lambda(Q^2) \geq 0.1 \ \forall Q^2$;
- *d'autant plus forte que Q^2 augmente*: $\lambda(Q^2)$ fonction croissante de Q^2.

Nous allons maintenant analyser ce résultat expérimental à la lumière des prédictions de la QCD pour voir si l'estimateur λ peut avoir, comme nous le souhaitons, une fonction discriminante.

3.2 Interprétation

Nous avons montré au chapitre précédent des résultats importants concernant le comportement de F_2 à bas x ($\alpha_s \ln(1/x) \sim 1$) :

- Le comportement à bas x de $F_2(x, Q^2)$ est gouverné par la distribution de gluons.
- Pour l'approche DGLAP, si la distribution de gluons (à Q_0^2) est sans divergence à bas x, alors, pour Q^2 suffisamment grand ($\alpha_s \ln(Q^2/Q_0^2) \sim 1$), le comportement de F_2 à bas x est déterminé -prédiction asymptotique- [3, 4, 5, 6].
- Pour l'approche DGLAP, si la distribution de gluons (à Q_0^2) est divergente à bas x, alors cette divergence impose le comportement de F_2 à bas x [7].
- Pour l'approche BFKL, F_2 à bas x est déterminée de façon univoque moyennant une contribution non-perturbative [8].

Nous allons maintenant déterminer λ dans ces différents cas.

Dans un premier temps, nous revenons sur la prédiction asymptotique DGLAP et nous démontrons un résultat que nous avons trouvé :

si la distribution de gluons (à Q_0^2) est sans divergence à bas x, alors, pour le domaine cinématique couvert par H1, λ est déterminé et son expression analytique complète ne dépend pas de la forme fonctionnelle de la distribution de gluons initiale, on dit alors que la prédiction de λ est universelle [9].

Ce résultat peut être vu comme un corrolaire de la prédiction asymptotique qui implique un comportement de F_2 universel (mais pas de sa forme analytique complète).

3.2.1 Universalité de l'estimateur λ

Considérons les équations DGLAP sans la partie non-singlet qui ne contribue pas à bas x :

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} \Sigma \\ g \end{pmatrix} = \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \begin{pmatrix} P_{qq} & 2N_f P_{qg} \\ P_{gq} & P_{gg} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \Sigma \\ g \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

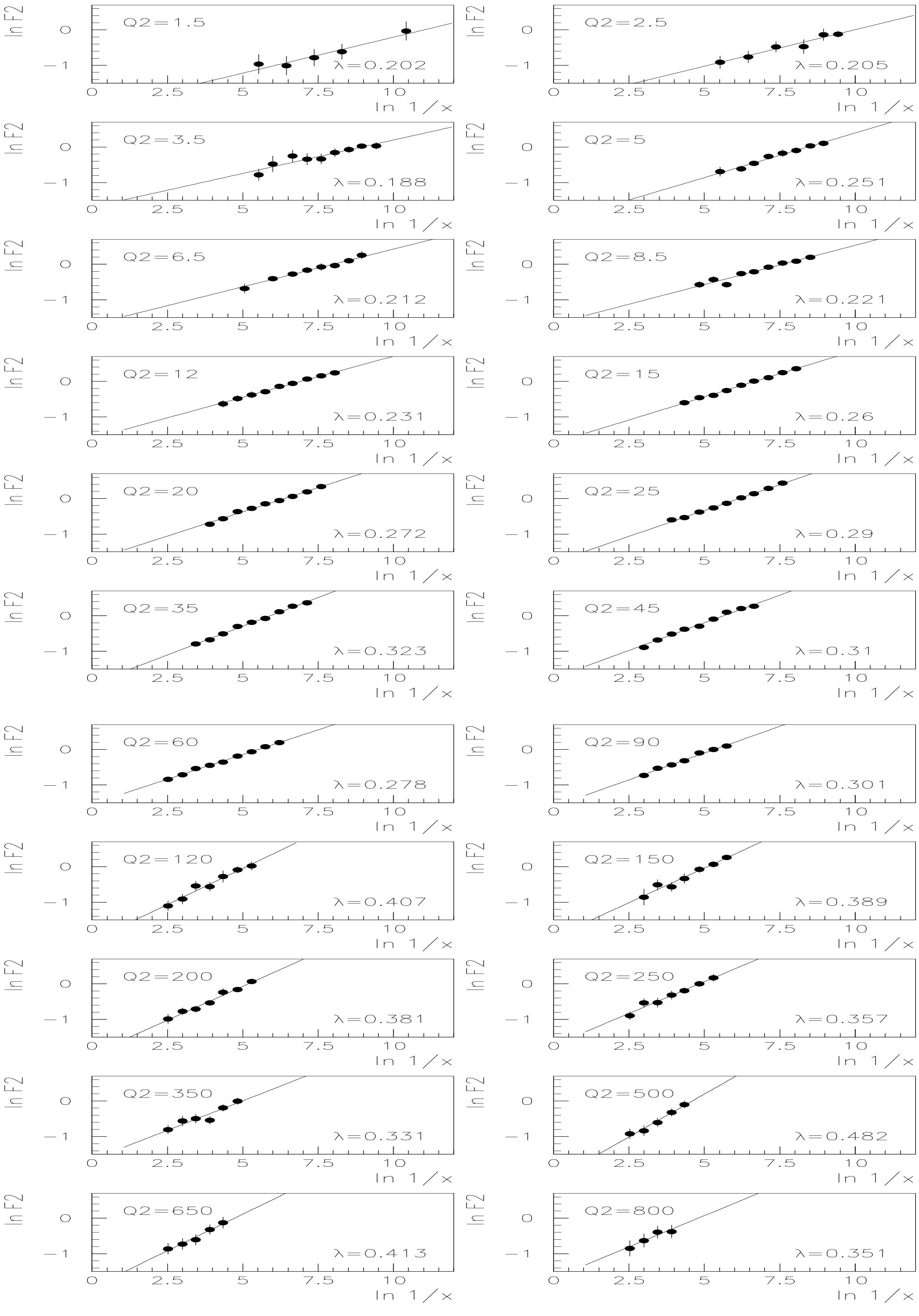


FIG. 3.1 – *On représente ci-dessus, pour les données H1 (1994), les ajustements linéaires* $F_2 \propto x^{-\lambda}, x \leq 0.1$ *pour les différents* Q^2(GeV ^{2}) *; on note aisément sur cette figure que la dérivée* $\frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln \frac{1}{x}}$ *est pratiquement indépendante de* x *pour chaque valeur de* Q^2 *; par suite,* $\lambda(Q^2) = \left\langle \frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln \frac{1}{x}} \right\rangle_{x \leq 0.1} (Q^2)$ *est bien défini.*

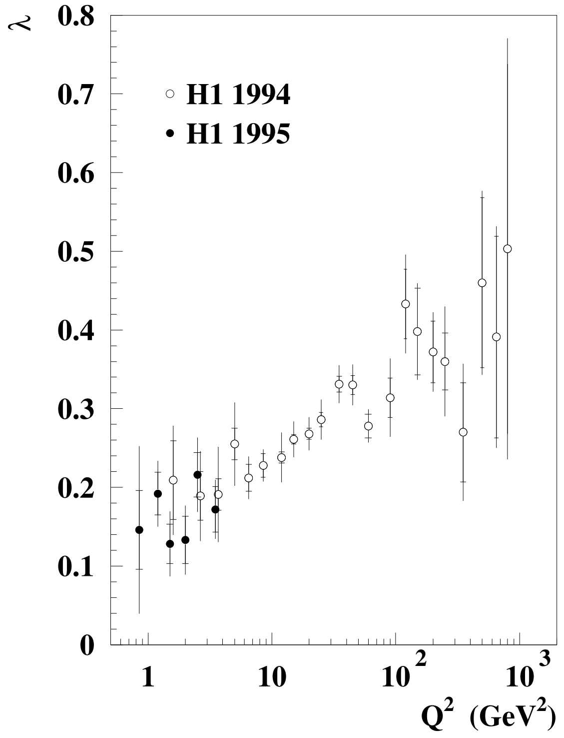


FIG. 3.2 – *Exposant λ déduit par une procédure d'ajustement de la forme : $F_2 \propto x^{-\lambda}$ pour $x < 0.1$ et Q^2 fixé. Les mesures de F_2 utilisées pour ce faire sont les mesures de H1 1994 (points ouverts) et H1 1995 (points noirs -dérivés de l'analyse des données à bas x et bas Q^2-).*

où le produit de convolution est défini par :

$$P \otimes f(x) = \int_x^1 \frac{dy}{y} P(y) f(x/y)$$

Nous allons démontrer le *corrolaire* énoncé ci-dessus. Pour des raisons techniques qui aparaissent dans la suite, il est plus simple de traiter le problème en transformées de Mellin ; on définit alors les moments d'ordre N pour les distributions Σ et g :

$$M_N^\Sigma = \int_0^1 x^{N-1} \Sigma(x, Q^2) dx \tag{3.3}$$

$$M_N^g = \int_0^1 x^{N-1} g(x, Q^2) dx \tag{3.4}$$

$$\gamma_{N,ij} = \int_0^1 z^{N-1} P_{ij}(z) dz \tag{3.5}$$

On déduit de ces formules les équivalences suivantes :

$$x \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad N \to 1 \tag{3.6}$$

$$x \to 1 \quad \Leftrightarrow \quad N \to \infty \tag{3.7}$$

Les développements bas x deviennent ainsi des développements $N \to 1$. Les équations DGLAP deviennent :

$$Q^2 \frac{\partial}{\partial Q^2} \begin{pmatrix} M_N^\Sigma \\ M_N^g \end{pmatrix} = \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \begin{pmatrix} \gamma_{N,qq} & 2N_f \gamma_{N,qg} \\ \gamma_{N,gq} & \gamma_{N,gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_N^\Sigma \\ M_N^g \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

On remarque que le produit de convolution est devenu un produit simple dans l'espace des moments de Mellin, ce qui simplifie notre analyse par la suite. On définit encore :

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{4\pi} \\ \xi &= \int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} b\alpha_S(k^2) \end{aligned} \tag{3.9}$$

On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} M_N^\Sigma \\ M_N^g \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \gamma_{N,qq} & 2N_f \gamma_{N,qg} \\ \gamma_{N,gq} & \gamma_{N,gg} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_N^\Sigma \\ M_N^g \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Le problème est maintenant complètement posé.

Dans cette équation -matricielle-, les transformées de Mellin des fonctions de splitting $\gamma_{N,ij}$ sont déterminées univoquement à partir des expressions de ces fonctions données au chapitre précédent. On note :

$$\begin{pmatrix} \gamma_{N,qq} & 2N_f \gamma_{N,qg} \\ \gamma_{N,gq} & \gamma_{N,gg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_F(N) & 2N_f \Phi_G^F(N) \\ \Phi_F^G(N) & \nu_G(N) \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

La résolution de l'équation (3.10) nécessite de déterminer les valeurs propres de la matrice ci-dessus, soit ν_+ et ν_-, $\nu_+ \geq \nu_-$.

On pose $\omega = N - 1$; à bas x ($\omega \to 0$), on obtient :

$$\begin{aligned} M_\omega^\Sigma(Q^2) &= \left(\frac{\nu_F - \nu_-}{\nu_+ - \nu_-} \exp \nu_+ \xi + \frac{\nu_+ - \nu_F}{\nu_+ - \nu_-} \exp \nu_- \xi \right) M_\omega^\Sigma(Q_0^2) \\ &+ \frac{2N_f \phi_G^F}{\nu_+ - \nu_F} \left(\exp \nu_+ \xi - \exp \nu_- \xi \right) M_\omega^g(Q_0^2) \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} M_\omega^g(Q^2) &= \left(\frac{\phi_F^G}{\nu_+ - \nu_-} \exp \nu_+ \xi - \exp \nu_- \xi \right) M_\omega^\Sigma(Q_0^2) \\ &+ \left(\frac{\nu_+ - \nu_F}{\nu_+ - \nu_-} \exp \nu_+ \xi + \frac{\nu_F - \nu_-}{\nu_+ - \nu_-} \exp \nu_- \xi \right) M_\omega^g(Q_0^2) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Le calcul donne à la limite $x \to 0$:

$$\nu_+ \simeq \frac{4N_c}{\omega} - a \tag{3.14}$$

$$M_\omega^\Sigma(Q^2) \simeq \omega \exp((\frac{4N_c}{\omega} - a)\xi) M_\omega^g(Q_0^2) \tag{3.15}$$

$$M_\omega^\Sigma(Q^2) \simeq \omega \exp(\frac{4N_c}{\omega}\xi) M_\omega^g(Q_0^2) \tag{3.16}$$

avec $a \sim 109/10$. Ensuite, $xg(x, Q_0^2)$ étant non divergente pour $x \to 0$, les propriétés des transformées de Mellin impliquent que $M_\omega^g(Q_0^2)$ est régulière pour $\omega \to 0$, on peut donc développer analytiquement cette fonction :

$$M_\omega^g(Q_0^2) = C[1 + \sum_i \omega^i b_i] \tag{3.17}$$

On calcule alors $x\Sigma(x,Q^2)$, les propriétés des transformées de Mellin impliquent :

$$
\begin{aligned}
x\Sigma(x,Q^2) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\omega_0-i\infty}^{\omega_0+i\infty} M_\omega^\Sigma(Q^2)\mathrm{e}^{\;\omega \ln 1/x} d\omega && (3.18)\\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\omega_0-i\infty}^{\omega_0+i\infty} \omega[C[1+\sum_i \omega^i b_i]]\mathrm{e}^{\;\omega \ln 1/x}\mathrm{e}^{\frac{4N_c}{\omega}\xi} d\omega && (3.19)
\end{aligned}
$$

où la ligne d'intégration $Re(\omega)=\omega_0$ est à droite de toutes les singularités de $M_\omega^\Sigma(Q^2)$, c'est-à-dire : ω_0 est strictement positif. On utilise l'identité suivante pour simplifier l'équation (3.18) :

$$
\frac{1}{2i\pi}\int_{\omega_0-i\infty}^{\omega_0+i\infty} \omega^n \mathrm{e}^{\;\omega \ln 1/x}\mathrm{e}^{\frac{4N_c}{\omega}\xi}\mathrm{d}\omega = \left(\frac{4N_c\xi}{\ln 1/x}\right)^{\frac{n+1}{2}} I_{n+1}[2(4N_c\xi \ln 1/x)^{\frac{1}{2}}] \qquad (3.20)
$$

Dans cette formule, les fonctions I_n sont les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce d'ordre n, on pose :

$$
\begin{aligned}
\bar\omega &= \left(\frac{4N_c\xi}{\ln 1/x}\right)^{\frac{1}{2}} && (3.21)\\
v &= 2(4N_c\xi \ln 1/x)^{\frac{1}{2}} && (3.22)
\end{aligned}
$$

Alors, avec les identités (3.20) et (3.21), l'équation (3.18) devient :

$$
\frac{\partial\, \mathrm{ln} x\Sigma}{\partial\, \mathrm{ln}\frac{1}{x}} = \bar\omega\frac{I_3(v)}{I_2(v)}\left[\frac{1+\sum_i b_i\bar\omega^i\frac{I_{i+3}}{I_3}(v)}{1+\sum_i b_i\bar\omega^i\frac{I_{i+2}}{I_2}(v)}\right] \qquad (3.23)
$$

A bas x, on peut également écrire :

$$
\frac{\partial\, \mathrm{ln} F_2}{\partial\, \mathrm{ln}\frac{1}{x}} = \frac{\partial \ln\langle e^2\rangle x\Sigma}{\partial\, \mathrm{ln}\frac{1}{x}}
$$

soit :

$$
\frac{\partial\, \mathrm{ln} F_2}{\partial\, \mathrm{ln}\frac{1}{x}} = \frac{\partial\, \mathrm{ln} x\Sigma}{\partial\, \mathrm{ln}\frac{1}{x}}
$$

On en déduit :

$$
\frac{\partial\, \mathrm{ln} F_2}{\partial\, \mathrm{ln}\frac{1}{x}} = \bar\omega\frac{I_3(v)}{I_2(v)}\left[\frac{1+\sum_i b_i\bar\omega^i\frac{I_{i+3}}{I_3}(v)}{1+\sum_i b_i\bar\omega^i\frac{I_{i+2}}{I_2}(v)}\right] \qquad (3.24)
$$

Nous avons achevé la première phase de notre démonstration : l'obtention d'une formule explicite pour $\frac{\partial \mathrm{ln} F_2}{\partial \mathrm{ln}\frac{1}{x}}$ *dépendant de la distribution initiale de gluons par l'intermédiaire des coefficients* b_i *; on rappelle que les* b_i *sont définis par la relation :*

$$
M_\omega^g(Q_0^2) = C[1+\sum_i \omega^i b_i]
$$

La deuxième phase consiste à montrer que, dans le domaine cinématique que l'on considère, la dépendance en b_i *disparaît.*

Le domaine cinématique couvert par l'expérience H1 est caractérisé par les relations suivantes sur les variables v et $\bar{\omega}$:

$$\begin{aligned} v &\geq 10 & (3.25)\\ \bar{\omega} &\leq 0.4 & (3.26) \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant la propriété $I_\nu(v) \simeq \frac{e^v}{\sqrt{2\pi v}}\left[1 - \frac{1}{2v}\frac{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})}{\Gamma(\nu-\frac{1}{2})}\right]$, on montre que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln\frac{1}{x}} &\simeq \bar{\omega}\frac{I_3(v)}{I_2(v)}\left[1 - \frac{b_1\bar{\omega}}{v} + O(\frac{\bar{\omega}^2}{v})\right] & (3.27)\\ &\simeq \bar{\omega}\frac{I_3(v)}{I_2(v)} & (3.28) \end{aligned}$$

Par suite, $\frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln\frac{1}{x}}$ est indépendante des b_i. On en déduit finalement :

$$\begin{aligned} \lambda(Q^2) &= \left\langle \frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln\frac{1}{x}} \right\rangle_{x\leq 0.1} (Q^2) & (3.29)\\ &= \left\langle \bar{\omega}\frac{I_3(v)}{I_2(v)} \right\rangle_{x\leq 0.1} (Q^2) & (3.30) \end{aligned}$$

λ est ainsi indépendant de la distribution initiale de gluons (universalité) et son expression est complètement déterminée en fonction des variables cinématiques, on peut également étudier sur cette formule l'influence de l'intervalle en x sur lequel la moyenne est calculée et vérifier que cette influence est marginale.

On peut encore simplifier l'expression (3.28), on trouve après développement asymptotique en $1/v$:

$$\begin{aligned} \frac{I_3(v)}{I_2(v)} &\simeq 1 - \frac{5}{2v} & (3.31)\\ \frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln\frac{1}{x}} &\simeq (\frac{4N_c\xi}{\ln 1/x})^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{4\ln 1/x} & (3.32) \end{aligned}$$

ce qui donne une information intéressante quant à la concavité de la fonction $\lambda(Q^2)$:

$$\frac{\partial^2}{(\partial \ln Q^2)^2}\left(\frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln\frac{1}{x}}\right) \sim \frac{\partial^3 \ln xF_s}{\partial \ln\frac{1}{x}\partial^2\xi} < 0 \qquad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2}{(\partial \ln Q^2)^2}\lambda(Q^2) < 0 \qquad (3.34)$$

3.2.2 Prédictions de la QCD

On représente alors les différentes prédictions de la QCD concernant $\lambda(Q^2)$ sur la fig. 3.3 :

- Dans l'approche DGLAP, sans divergence à bas x de la distribution initiale de gluons $xg(x \to 0, Q_0^2) \sim$ *constante*, on a obtenu au paragraphe précédent le résultat suivant :

$$\lambda(Q^2) = \left\langle \bar{\omega}\frac{I_3(v)}{I_2(v)} \right\rangle_{x\leq 0.1} (Q^2) \qquad (3.35)$$

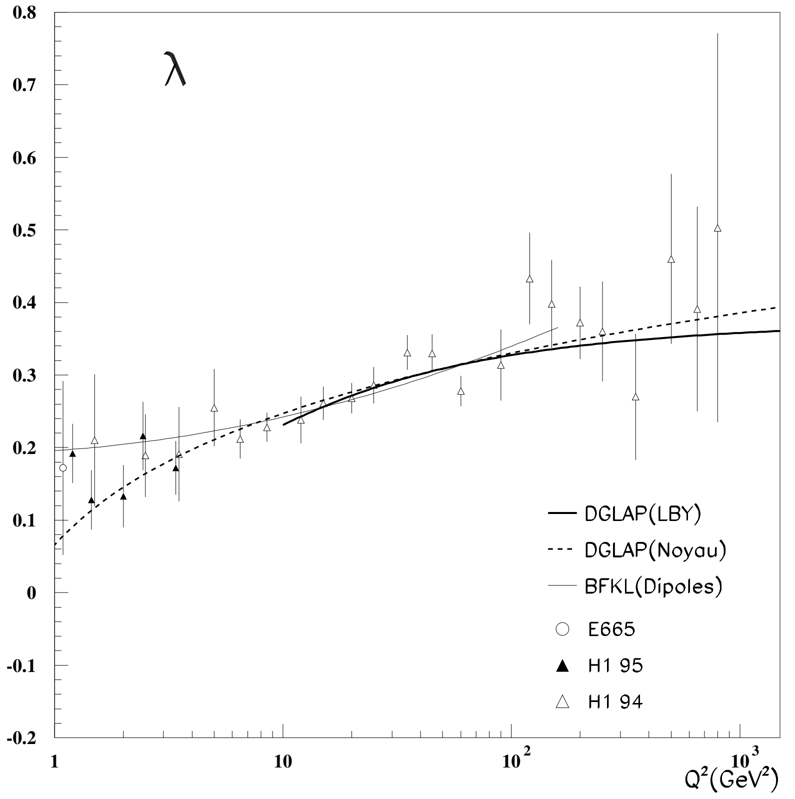


FIG. 3.3 – *Valeurs de λ déterminées à partir des données de H1 [1, 2] et E665 [10] comparées aux différentes prédictions de la QCD [14].*

avec :

$$\frac{\partial^2}{(\partial \ln Q^2)^2}\lambda(Q^2) < 0 \tag{3.36}$$

On note DGLAP(Noyau) cette prédiction sur la fig. 3.3

- Dans l'approche DGLAP, avec une distribution de gluons initiale divergente à bas x, $xg(x \to 0, Q_0^2) \sim x^{-\lambda_s}$ (λ_s strictement positif), López, Barreiro et Ynduráin (LBY) ont montré [7] :

$$F_2(x, Q^2) = [B_s(Q^2)x^{-\lambda_s} + C_s(Q^2)](1-x)^{\nu(Q^2)} \tag{3.37}$$

d'où

$$\lambda(Q^2) \simeq \lambda_s \tag{3.38}$$

On note DGLAP(LBY) cette prédiction sur la fig. 3.3.

Nous pouvons démontrer simplement pourquoi, dans ce cas, $\lambda(Q^2) \simeq \lambda_s$ est pratiquement indépendant de Q^2. Cette démonstration nous permet aussi de préciser les hypothèses qui gouvernent cette approche.

Les équations DGLAP-singlet s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\begin{array}{c} M_N^\Sigma \\ M_N^g \end{array}\right) = 2\left(\begin{array}{cc} \gamma_{N,qq} & 2N_f\gamma_{N,qg} \\ \gamma_{N,gq} & \gamma_{N,gg} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} M_N^\Sigma \\ M_N^g \end{array}\right) \tag{3.39}$$

ce que l'on peut exprimer sous la forme :

$$\left(\begin{array}{c} M_N^\Sigma \\ M_N^g \end{array}\right)(\xi) = exp([\xi-\xi_0][2\left(\begin{array}{cc} \gamma_{N,qq} & 2N_f\gamma_{N,qg} \\ \gamma_{N,gq} & \gamma_{N,gg} \end{array}\right)])\left(\begin{array}{c} M_N^\Sigma \\ M_N^g \end{array}\right)(\xi_0) \tag{3.40}$$

Dès lors, si on suppose une condition initiale divergente à bas x :

$$xg(x\to 0, Q_0^2) \sim x^{-\lambda_s(Q_0^2)}$$

$$x\Sigma(x\to 0, Q_0^2) \sim x^{-\lambda_s(Q_0^2)}$$

on en déduit que $\left(\begin{array}{c} M_N^\Sigma \\ M_N^g \end{array}\right)(\xi_0)$ présente une singularité pour : $N = 1+\lambda_s(Q_0^2)$.

Le membre de droite de l'égalité (3.40) possède ainsi cette singularité par hypothèse. De plus, le calcul montre que toutes les singularités du noyau DGLAP de l'équation (3.40) correspondent à des valeurs de N plus petites que 1, il s'ensuit que la singularité *la plus à droite dans le plan de Mellin* du membre de droite de l'égalité (3.40) se situe à $N = 1+\lambda_s(Q_0^2)$.

Le membre de gauche de cette égalité ($\left(\begin{array}{c} M_N^\Sigma \\ M_N^g \end{array}\right)(\xi)$) doit ainsi présenter cette même propriété, il est donc singulier pour :

$$N = 1+\lambda_s(Q_0^2) \tag{3.41}$$

Dans cette approche, on admet également un comportement singulier de type Regge quel que soit Q^2, ainsi :

$$xg(x\to 0, Q^2) \sim x^{-\lambda_s(Q^2)}$$

$$x\Sigma(x\to 0, Q^2) \sim x^{-\lambda_s(Q^2)}$$

le membre de gauche de l'équation (3.40) est donc également singulier par hypothèse pour :

$$N = 1+\lambda_s(Q^2) \tag{3.42}$$

On déduit des égalités (3.41) et (3.42) la relation suivante :

$$1+\lambda_s(Q_0^2) = 1+\lambda_s(Q^2) \tag{3.43}$$

soit :

$$\lambda_s(Q_0^2) = \lambda_s(Q^2) \tag{3.44}$$

ce qui prouve que, dans cette approche, λ est indépendant de Q^2. Toutefois, la prise en compte des effets d'ordre supérieur (NLL(Q^2)) et de la contribution non-singlet modifient légèrement les considérations ci-dessus en introduisant une faible dépendance en Q^2 pour l'estimateur λ.

- Dans l'approche BFKL, on trouve [11], [12], [13] :

$$\begin{aligned}
F_2 &= C a^{1/2} x^{-\lambda_L} \frac{Q}{Q_0} e^{-\frac{a}{2}\ln^2\frac{Q}{Q_0}} \\
\lambda_L &= \frac{4\bar{\alpha} N_C \ln 2}{\pi} \\
a &= \left(\frac{\bar{\alpha} N_c}{\pi} 7\zeta(3) \ln\frac{1}{x}\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

La dérivation de ce résultat repose sur l'utilisation du modèle des dipôles [11], [12], qui est équivalent à l'approche BFKL pour les observables inclusives que nous considérons. Nous présentons brièvement les principales idées de ce modèle dans l'appendice I à ce chapitre.
on déduit :

$$\lambda(Q^2) = \left\langle \lambda_L - \frac{1}{2}\frac{1}{\ln\frac{1}{x}} + \frac{1}{14\frac{\bar{\alpha} N_c}{\pi}\zeta(3)\ln^2\frac{1}{x}} \ln^2\frac{Q}{Q_0} \right\rangle_{x\leq 0.1} \tag{3.46}$$

On note BFKL(Dipoles) cette prédiction sur la fig. 3.3.

La déduction de ce résultat est non triviale, mais il est possible de le déduire partiellement par un raisonnement élémentaire qui révèle, par ailleurs, quelques idées simples que recouvre l'approche BFKL. Nous présentons ce raisonnement dans l'appendice II à ce chapitre. Cette équation (3.46) implique de plus la propriété de concavité suivante :

$$\frac{\partial^2}{(\partial \ln Q^2)^2}\lambda(Q^2) > 0 \tag{3.47}$$

Les différentes prédictions de la QCD que nous venons d'exposer sont rassemblées sur la fig. 3.3, laquelle ne permet pas de déterminer nettement quelle image physique, DGLAP ou BFKL, s'impose pour décrire la forte montée de $F_2(x, Q^2)$ à bas x : en effet, moyennant le niveau de précision expérimental actuel, les deux types de prédictions s'ajustent également aux données.

3.3 Conclusions et perspectives

- Nous avons défini une fonction $\lambda(Q^2)$:

$$\lambda(Q^2) = \left\langle \frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln\frac{1}{x}} \right\rangle_{x\leq 0.1} (Q^2) \tag{3.48}$$

qui permet de quantifier la montée de $F_2(x, Q^2)$ à bas x, plus précisément, qui permet de traduire analytiquement les deux propriétés suivantes vérifiées par la fonction de structure F_2 :

  - *forte montée à bas* x, soit $\lambda(Q^2) \geq 0.1\ \forall Q^2$.
  - *d'autant plus forte que* Q^2 *augmente*, soit $\lambda(Q^2)$ fonction croissante de Q^2.

Définir ainsi une fonction permet ensuite de faire des comparaisons précises entre les données et les prédictions théoriques que cette fonction différencie nettement pour ce qui concerne leurs comportements respectifs à bas x. Nous avons en effet montré que les calculs de λ pour les équations d'évolution DGLAP et BFKL sont bien distincts ; par exemple, l'approche DGLAP implique la propriété de concavité suivante :

$$\frac{\partial^2}{(\partial \ln Q^2)^2} \lambda^{DGLAP}(Q^2) < 0 \tag{3.49}$$

alors que l'approche BFKL impose l'inverse :

$$\frac{\partial^2}{(\partial \ln Q^2)^2} \lambda^{BFKL}(Q^2) > 0 \tag{3.50}$$

La fig. 3.3 regroupe les valeurs expérimentales de λ ainsi que les prédictions QCD que nous avons évaluées, il en ressort que le niveau de précision actuel n'est pas suffisant pour déterminer quelle prédiction, DGLAP ou BFKL, s'ajuste le plus correctement aux données.

- L'estimateur $\lambda(Q^2)$ reste cependant un bon candidat pour parvenir à cette fin en disposant de mesures plus précises. En effet, les prédictions de la QCD concernant λ sont sensiblement différentes pour Q^2 compris dans l'intervalle $[1., 10.]$ GeV ^{2} [14]. Par exemple, comme indiqué ci-dessus, les propriétés de concavité de ces prédictions sont très différentes ; dès lors, des mesures précises de $F_2(x, Q^2)$ pour ces valeurs de Q^2 ($Q^2 \subset [1., 10.]$ GeV ^{2}) doivent permettre de les séparer.

- Notre analyse expérimentale se concentre pour une large part sur ce domaine ($Q^2 \subset [1., 10.]$ GeV ^{2}), nous la présentons dans la suite.

Nous pouvons ainsi conclure que λ possède une fonction discriminante théorique incontestable, c'est à l'expérience d'y faire écho ; c'est une des perspectives que nous donnons à l'analyse expérimentale que nous rapportons dans la suite.

APPENDICE I

Dans cet appendice, nous présentons les principales idées qui constituent le modèle des dipôles ainsi que les propriétés et prédictions importantes qui s'ensuivent [11], [12].

Introduction

L'idée initiale de ce modèle est de considérer le proton comme un ensemble de dipôles de couleur, chaque dipôle étant composé d'une paire quark-antiquark lourde, appelée onium. La masse de l'onium fixe la taille transverse dans l'espace des impulsions. Cette taille transverse est considérée comme une échelle dure pour les calculs perturbatifs réalisés dans ce modèle.

En supposant qu'il existe un grand nombre de dipôles de couleur et dans la limite de grande énergie qui donne lieu à la radiation de gluons mous, il est possible de calculer l'évolution de la fonction d'onde de l'onium. On peut montrer alors que cette équation d'évolution est équivalente à celle de l'approche BFKL pour ce qui concerne la description des phénomènes inclusifs ; par suite, les prédictions concernant les observables inclusives sont identiques dans les deux approches. Dès lors, il est intéressant d'utiliser le formalisme du modèle des dipôles qui permet des calculs plus simples que le formalisme BFKL.

De l'expression du tenseur hadronique :

$$W_{\mu\nu}(p,q) = \frac{1}{4M_p}\sum_{\sigma}\int \frac{d^4x}{2\pi} e^{iqx} < p,\sigma|[J_\mu(x),J_\nu(0)]|p,\sigma > \tag{3.51}$$

il est facile de constater que, dans l'hypothèse où Q^2 est grand, la contribution dominante à l'intégrale ci-dessus provient du domaine $x^2 \sim 0$, c'est-à-dire de cône de lumière. Pour exploiter cette propriété, on introduit les coordonnées sur le cône de lumière définies par :

$$x^+ = \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}} \tag{3.52}$$

$$x^- = \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}} \tag{3.53}$$

$$\underline{x} = (x^1, x^2) \tag{3.54}$$

Avec ces notations, le produit scalaire entre deux vecteurs s'écrit par exemple :

$$v_1.v_2 = v_1^+ v_2^- + v_1^- v_2^+ + \underline{v_1 v_2} \tag{3.55}$$

Fonction d'onde de l'onium

Le système de coordonnées précédent est utilisé dans le modèle des dipôles. On considère de plus le référentiel de moment infini de la paire quark-antiquark pour lequel $p^+ \to \infty$.

- *Fonction d'onde à l'ordre 0 :*
  On définit $\phi^{(0)}_{\alpha\beta}(\underline{k}_1, z_1)$ la fonction d'onde à l'ordre 0 (sans gluon) de l'état lié

quark-antiquark. Les indices α, β sont les indices spinoriels des deux quarks et k_1 est le moment de l'antiquark ; le quark possède alors le moment $p - k_1$. La fig. 3.4 illustre ces notations, on note de plus $z_1 = \frac{k_1^+}{p^+}$.

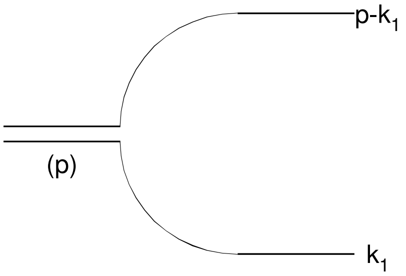


FIG. 3.4 – *Diagramme décrivant la fonction d'onde de l'onium à l'ordre 0*

Le carré de la fonction d'onde de l'onium s'écrit :

$$\Phi^{(0)}(\underline{k}_1, z_1) = \sum_{\alpha,\beta} \left|\phi^{(0)}_{\alpha\beta}(\underline{k}_1, z_1)\right|^2$$

Cette quantité correspond à la densité de probabilité de trouver dans l'onium un dipôle de moment transverse $\underline{k}_1$ et de moment longitudinal z_1.
On introduit la transformée de Fourier de la formule précédente :

$$\Phi^{(0)}(\underline{x}_1, z_1) = \sum_{\alpha,\beta} \left|\phi^{(0)}_{\alpha\beta}(\underline{x}_1, z_1)\right|^2$$

- *Fonction d'onde à l'ordre 1 :*
  Pour évaluer cette fonction d'onde, on prend en compte des diagrammes comme celui représenté sur la fig. 3.5. On peut montrer ensuite que le carré de cette quantité s'écrit :

$$\Phi^{(1)}(\underline{x}_1, z_1) = \int d^2\underline{x}_2 \int \frac{dz_2}{z_2} \frac{\alpha_s C_F}{\pi^2} \frac{\underline{x}_{10}^2}{\underline{x}_{21}^2 \underline{x}_{20}^2} \Phi^{(0)}(\underline{x}_1, z_1)$$

  où on $\underline{x}_{ij} = \underline{x}_i - \underline{x}_j$ et où C_F est tel que :

$$C_F = \frac{1}{N_c} \sum_a Tr\Big(T^a T^a\Big)$$

  Il existe ainsi une factorisation intégrale entre le terme d'ordre 0 et le terme d'ordre 1.

- *Fonction d'onde à tous les ordres :*
  Les propositions précédentes se généralisent en considérant les termes à n gluons mous d'impulsions $k_2, \ldots, k_{n+1}$, ordonnés tels que $z_2 >> z_3 >> \ldots >>$

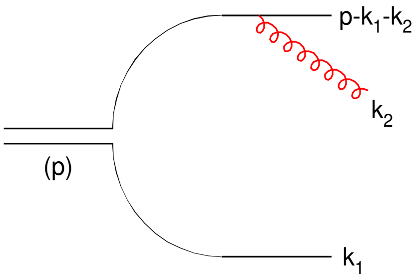


FIG. 3.5 – *Exemple de diagramme décrivant la fonction d'onde à l'ordre 1.*

z_{n+1} où z_i est la fraction d'impulsion longitudinale de l'onium emportée par le gluon i. Dans l'approximation des logarithmes dominants, on peut montrer que la factorisation existe à tous les ordres, si l'on ne prend en compte que les termes coplanaires (où les gluons émis ne se chevauchent pas quand on dessine le diagramme de l'amplitude au carré). Dans la représentation de G. 't Hooft, un quark est considéré comme une ligne portant un indice de couleur et un gluon comme deux lignes de couleur ayant des directions opposées ; on appelle alors “dipôle” une paire de lignes couleur/anti-couleur. De plus, dans cette représentation, les termes non-coplanaires sont pondérés par un terme en $1/N_c^2$ et sont donc négligeables dans la limite $N_c \to \infty$.

- *Distribution de dipôles dans un onium :*
  En utilisant le formalisme précédent, on peut montrer que le nombre de dipôles de taille transverse x dans un dipôle de taille transerve x_{01}, pour une valeur donnée de $Y = \log z_1/z$ (où z est la fraction d'impulsion de l'onium emportée par le gluon le plus mou du dipôle considéré), est égal à :

$$n(x_{01}, x, Y) = \frac{1}{2}\frac{x_{01}}{x}\frac{e^{(\alpha_p-1)Y}}{\sqrt{7\alpha_s C_F \zeta(3) Y}} \exp\left(-\frac{\pi \log^2 \frac{x_{01}}{x}}{28\alpha_s C_F \zeta(3) Y}\right) \tag{3.56}$$

  avec :

$$\alpha_p - 1 = 8\frac{\alpha_s C_F}{\pi}\log 2$$

  On remarque que cette distibution correspond à une évolution de type BFKL.

Déduction de la fonction de structure F_2 du proton

On détermine dans un premier temps la fonction de structure de l'onium, ensuite on dérive la fonction de structure F_2 du proton.

- Nous avons :

$$\sigma_{\gamma^*-onium} = \int d^2\underline{r}\, dz \Phi^{(0)}(\underline{r}, z)\sigma(x, Q^2; r)$$

où $\Phi^{(0)}(\underline{r}, z)$ est la densité de probabilité de trouver des configurations de dipôles avec un moment transverse $\underline{r}$. Le théorème de factorisation en k$_t$ permet ensuite d'écrire :

$$Q^2\sigma(x, Q^2; Q_0^2) = \int d^2\underline{k} \int_0^1 \frac{dz}{z} \hat{\sigma}(x/z, \underline{k}^2/Q^2) F\left(z, \underline{k}; Q_0^2\right)$$

où $\hat{\sigma}/Q^2$ est la section efficace de Born du processus ($\gamma\, gluon \rightarrow q\bar{q}$) pour un gluon hors couche de masse et de moment transverse $\underline{k}$. $F(z, \underline{k}; Q_0^2)$ est la densité de gluons non intégrée ; elle est reliée à la densité de gluons usuelle par l'égalité :

$$G(x, Q^2; Q_0^2) = \int_0^{Q^2} d^2\underline{k} F(x, \underline{k}; Q_0^2)$$

Le théorème de factorisation en k$_t$ peut s'appliquer également pour la détermination de la section efficace gluon-dipôle. On peut ainsi calculer $F\left(x, \underline{k}; Q_0^2\right)$ en fonction de la densité de dipôles $n(\underline{x}_{01}, \underline{x}, z')$ dans l'onium. Il vient alors :

$$\underline{k}^2 F\left(x, \underline{k}; x_{01}^2\right) = \int \frac{d^2\underline{x}}{\underline{x}^2} \int \frac{dz'}{z'} n(\underline{x}_{01}, \underline{x}, z') \hat{\sigma}_{g-d}(z/z', \underline{x}^2\underline{k}^2)$$

où $\underline{k}^2$ représente la virtualité du gluon échangé et $\hat{\sigma}_{g-d}(z/z', \underline{x}^2\underline{k}^2)$ est la section efficace d'interaction gluon-dipôle.

- Pour décrire l'interaction *électron-proton* dans le cadre du modèle des dipôles, on suppose une distribution initiale de dipôles de taille transverse x_{01} dans le proton. Cette densité n'est pas calculable perturbativement et est introduite comme un paramètre dans le modèle. On peut ensuite appliquer le formalisme précédent et obtenir des prédictions pour les fonctions de structure du proton. On obtient pour F_2 la prédiction suivante valable dans le domaine des petits x et des Q^2 modérés (domaine pour lequel le théorème de factorisation en k$_t$ est valable) :

$$F_2(x, Q^2) = C \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha_s N_c}{\pi} 7\zeta(3) \log\frac{1}{x}}} e^{(\alpha_p - 1)\log 1/x} \frac{Q}{Q_0} \exp\left(-\frac{\pi}{14\alpha_s N_c \zeta(3) \log\frac{1}{x}} \log^2\left(\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)\right)$$

où C, Q_0^2 et α_p sont trois paramètres et ζ est une fonction connue. L'ajustement de la prédiction sur F_2 aux mesures expérimentales permet finalement de déterminer les 3 paramètres [12].

Notons qu'il est également possible de dériver des prédictions pour F_L et R. En particulier, on montre que les prédictions sur R de l'approche DGLAP et du formalisme du modèle des dipôles sont assez différentes et devraient permettre de distinguer ces deux types de modèle lorsque des mesures relativement précises de cette quantité seront disponibles [14].

APPENDICE II

Dans cet appendice nous montrons comment déduire par un raisonnement simple le comportement global de la fonction de structure F_2 à bas x dans l'approche BFKL.

L'évolution en x de l'équation BFKL traduit le comportement à bas x de la fonction d'onde du proton. Elle décrit comment des gluons à grand moment longitudinal *s'habillent* de gluons à plus petit moment. Considérons ainsi un gluon initial portant une fraction importante de l'impulssion du proton, la probabilité d'émettre un gluon avec la fraction d'impulsion x_1 à dx_1 près et avec un moment transverse au carré Q^2 à dQ^2 près est alors :

$$dP_1 = \frac{3\alpha_S}{\pi}\frac{dQ^2}{Q^2}\frac{dx_1}{x_1} \tag{3.57}$$

ce qui est une conséquence de l'expression de la fonction de splitting P_{gg}. L'évolution BFKL s'effectuant à une échelle transverse Q fixée, nous pouvons écrire $\frac{dQ^2}{Q^2} = c$, soit :

$$dP_1 = c\frac{3\alpha_S}{\pi}\frac{dx_1}{x_1} \tag{3.58}$$

L'émission de ce premier gluon est donc certaine dans l'intervalle de rapidité $\Delta \ln x_1$:

$$\Delta \ln \frac{1}{x_1} = (c\frac{3\alpha_S}{\pi})^{-1} \tag{3.59}$$

Supposons maintenant que N gluons ont été émis, que se passe-t-il pour le traitement du $N+1$ ième gluon dans la représentation BFKL ?

L'hypothèse est que le $N+1$ ième gluon est émis par des fluctuations de charges de couleur des N premiers gluons. Dès lors, tout se passe comme si la charge effective pour la $N+1$ ième émission vérifie :

$$g_N = \sqrt{\frac{c_1 N}{c}}g \tag{3.60}$$

avec $\alpha_S = \frac{g^2}{4\pi}$, c_1 étant une constante que l'on peut déterminer par le calcul : $c_1 = 4\ln 2$.

Alors, la probabilité d'émission devient :

$$dP_N = c_1\frac{3\alpha_S}{\pi}N\frac{dx_N}{x_N} \tag{3.61}$$

soit :

$$\Delta \ln \frac{1}{x_N} = (c_1\frac{3\alpha_S N}{\pi})^{-1} \tag{3.62}$$

On en déduit que la fraction d'impulsion du dernier gluon émis vérifie dans cet ensemble de gluons *habillant* le gluon initial :

$$\ln 1/x = (c_1\frac{3\alpha_S}{\pi})^{-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} \tag{3.63}$$

soit :

$$\ln 1/x = (c_1\frac{3\alpha_S}{\pi})^{-1}\ln N \tag{3.64}$$

Par suite :

$$N(x) = e^{(c_1 \frac{3\alpha_S}{\pi} \ln 1/x)} \tag{3.65}$$

La distribution de gluons $xg(x, Q^2)$ est alors :

$$xg \simeq \frac{N}{d(\ln 1/x)} = e^{(c_1 \frac{3\alpha_S}{\pi} \ln 1/x)} c_1 \frac{3\alpha_S}{\pi} \tag{3.66}$$

On retrouve ainsi le comportement de type Regge en $x^{(-\alpha_P)}$ imposé par une évolution BFKL avec :

$$\alpha_P = 4 \ln 2 \frac{3\alpha_S}{\pi} \tag{3.67}$$

L'image physique de la représentation BFKL ressort de plus facilement de ce raisonnement : il s'agit d'une évolution des fluctuations de charges de couleur augmentant avec $\ln 1/x$.

Bibliographie

[1] H1 Collaboration, S. Aid et al., *Nucl. Phys.* **B470** (1996) 3.

[2] H1 Collaboration, *DESY-97-024* (1997).

[3] D.J. Gross et F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973) 1343 ;
H.D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346.

[4] A. De Rujula et al., *Phys. Rev.* **D40** (1974) 1649.

[5] R.D. Ball, S. Forte, *Phys. Lett.* **B351** (1995) 313.

[6] M. Glück, E. Reya et A.Vogt, *Z.Phys.* **C53** 127 (1992) ; *Phys. Lett.* **B306** (1993) 391 ; *Z. Phys.* **C67** (1995) 433.

[7] C. López et F.J. Ynduráin, *Nucl. Phys.* **B 171** (1980) 231 ; *Nucl. Phys.* **B 183** (1981) 157 ;
C. López, F. Barreiro et F.J. Ynduráin, *DESY-96-087* (1996).

[8] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov et V.S. Fadin, *Phys. Lett.* **B60** (1975) 50 ; *Sov. Phys. JETP* **44** (1976) 443 ; **45** (1977) 199 ; Ya.Ya. Balitskii et L.N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **28** (1978) 822.

[9] H. Navelet, R. Peschanski, Ch. Royon, L. Schoeffel, S. Wallon, *Mod. Phys. Lett.***A12** (1997) 887-897.

[10] E665 Collaboration, M.R. Adams et al., *FNAL Pub-95/936-E* (1995).

[11] A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B415** (1994) 373 ; A.H. Mueller et B. Patel, *Nucl. Phys.* **B425** (1994) 471 ; A.H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B437** (1995) 107.

[12] H. Navelet, R. Peschanski, Ch. Royon, *Phys. Lett.* **B366** (1995) 329.

[13] H. Navelet, R. Peschanski, Ch. Royon, S. Wallon, *SPhT-96/043*, *DESY- 96-108* (1996) ; S. Wallon, *proceedings Moriond*, *SPhT-96/048* (1996).

[14] L.Schoeffel, *Proceedings de l'Ecole d'Eté de Cargèse* (1996).

Chapitre 4

AJUSTEMENTS QCD

Dans ce chapitre nous présentons notre contribution au problème de la détermination des distributions partoniques par la procédure dite d'ajustements QCD.

Il s'agit d'introduire un ensemble de paramètres qui définissent des distributions de partons initiales $f_i(x, Q_0^2)$, à partir desquelles nous calculons les distributions $f_i(x, Q^2)$ quel que soit Q^2, grâce à une évolution QCD (en résolvant les équations DGLAP avec les conditions initiales $f_i(x, Q_0^2)$).

Les densités $f_i(x, Q^2)$ permettent ensuite de déduire des observables, que l'on compare avec les mesures expérimentales, pour chaque expérience considérée.

Ce processus de comparaison est quantifié à l'aide d'un estimateur et nous pouvons alors ajuster précisément les paramètres initiaux.
Le succès de cette procédure témoigne notamment de la validité des équations DGLAP pour décrire les évolutions partoniques en QCD perturbative.

Nous exposons dans ce chapitre le traitement complet que nous proposons dans ce sens.

♠ Nous explicitons dans un premier temps deux méthodes d'évolution QCD que nous avons programmées : une méthode polynomiale et une méthode de type Euler, la dernière nous servant pour la réalisation d'évolutions NLL(Q^2) des équations DGLAP.

♠ Nous présentons et justifions ensuite les formes analytiques initiales $f_i(x, Q_0^2)$ que nous adoptons ; le traitement des saveurs lourdes et la déduction des observables expérimentales sont discutés, de même que le problème de l'extraction de la densité de gluons et la corrélation de ce problème à la détermination de $\alpha_S(M_Z^2)$.

♠ L'estimateur de comparaison (l'estimateur χ^2) est alors défini ; nous explicitons la caractère métrique de ce dernier et justifions ainsi que l'ajustement des paramètres initiaux revient à minimiser une distance sur une algèbre définie par les mesures expérimentales. Le traitement des erreurs systématiques corrélées au cours du processus de minimisation est également expliqué précisément.

♠ Notre analyse fournit alors un certain nombre de résultats que nous discutons : nous vérifions en particulier la règle de somme sur l'impulsion avec une très bonne précision et nous calculons la densité de gluons et son erreur systématique associée.

♠ Nous discutons finalement le principe de la détermination de $\alpha_S(M_Z^2)$ par la procédure d'ajustements QCD.

Au cours de cette discussion, nous justifions chaque étape de notre raisonnement et nous donnons les perspectives que nous envisageons pour améliorer chacune d'entre elles.

4.1 Equations d'évolution DGLAP

4.1.1 Introduction

On rappelle que les équations d'évolution DGLAP sont des équations maîtresses de QCD [1], cette dénomination a un sens précis en physique statistique où les équations maîtresses décrivent l'évolution en fonction du temps des populations des niveaux d'énergie pour un système physique donné moyennant les probabilités de transition entre ces différents niveaux. De manière similaire, les équations DGLAP traduisent la variation en fonction du pouvoir de résolution des distributions partoniques moyennant les probabilités de transition entre les différentes formes partoniques.

Techniquement, ce sont des équations intégro-différentielles qui décrivent l'évolution en Q^2 des distributions de partons [2], elles s'écrivent :

$$\begin{aligned}
Q^2\frac{\partial\Sigma(x,Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}\left[\Sigma(y,Q^2)P_{qq}(\frac{x}{y})+2N_f g(y,Q^2)P_{qg}(\frac{x}{y})\right]\\
Q^2\frac{\partial g(x,Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}\left[\Sigma(y,Q^2)P_{gq}(\frac{x}{y})+g(y,Q^2)P_{gg}(\frac{x}{y})\right]\\
Q^2\frac{\partial q_{NS}(x,Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\int_x^1\frac{dy}{y}q_{NS}(y,Q^2)P_{NS}(\frac{x}{y}) \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

où $\Sigma(x,Q^2)$ et $q_{NS}(x,Q^2)$ désignent respectivement des distributions de type singlet et non-singlet[1]. Dans ce système, les fonctions P_{ij},P_{NS} sont appelées fonctions de splitting, nous avons $P_{ij}(z)=P_{ij}^{(0)}(z)+\frac{\alpha_S}{2\pi}P_{ij}^{(1)}(z)$ et $P_{NS}(z)=P_{NS}^{(0)}(z)+\frac{\alpha_S}{2\pi}P_{NS}^{(1)}(z)$ ($P_{NS}^{(0)}(z)=P_{qq}^{(0)}(z)$) où les $P^{(0)}$ contribuent à l'approximation LL(Q^2) (*Leading Log(Q^2)*) et les $P^{(1)}$ sont les corrections d'ordre supérieur -NLL(Q^2) (*Next to Leading Log(Q^2)*)-.

$$\begin{aligned}
P_{NS}^{(0)}(z) &= \frac{4}{3}\frac{1+z^2}{(1-z)_+}+2\delta(1-z)\\
P_{qq}^{(0)}(z) &= \frac{4}{3}\frac{1+z^2}{(1-z)_+}+2\delta(1-z)\\
P_{qg}^{(0)}(z) &= \frac{1}{2}\left[z^2+(1-z)^2\right]\\
P_{gq}^{(0)}(z) &= \frac{4}{3}\frac{1+(1-z)^2}{z}\\
P_{gg}^{(0)}(z) &= 6\left[\frac{z}{(1-z)_+}+\frac{1-z}{z}+z(1-z)+\left(\frac{11}{12}-\frac{N_f}{18}\right)\delta(1-z)\right] \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

---

[1] Nous supposons implicitement ici et dans la suite de ce texte que les champs et la constante de couplage fort sont renormalisés suivant le "Minimal Substraction scheme" ($\bar{MS}$), les différentes quantités physiques qui interviennent dans la suite sont ainsi exprimées dans ce schéma.

A l'approximation NLL(Q^2), nous pouvons également exprimer l'évolution de α_S en fonction de Q^2 :

$$\begin{aligned} Q^2\frac{d\alpha_s(Q^2)}{dQ^2} &= -\frac{\beta_0}{4\pi}{\alpha_S}^2 - \frac{\beta_1}{(4\pi)^2}{\alpha_S}^3 \\ \beta_0 &= 11 - \frac{2N_f}{3} \\ \beta_1 &= 102 - \frac{38N_f}{3} \end{aligned} \tag{4.3}$$

On donne dans l'appendice I à ce chapitre une dérivation élementaire de $\alpha_S(Q^2)$.

L'équation précédente peut se résoudre en introduisant un paramètre Λ, on obtient :

$$\alpha_S(Q^2) = \alpha_S^0(Q^2)(1 - \frac{102-\frac{38N_f}{3}}{(11-\frac{2N_f}{3})^2}\frac{\ln\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}{\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}) + \mathcal{O}(\frac{1}{\ln^3(\frac{Q^2}{\Lambda^2})}) \tag{4.4}$$

où $\alpha_S^0(Q^2)$ désigne l'approximation LL(Q^2) de α_S :

$$\alpha_S(Q^2) = \alpha_S^0(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2N_f)\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}} + \mathcal{O}(\frac{1}{\ln^2(\frac{Q^2}{\Lambda^2})}) \tag{4.5}$$

Ainsi, les équations d'évolution DGLAP peuvent être utilisées à la limite LL(Q^2) ou NLL(Q^2). On note cependant sur les formules ci-dessus que la définition du paramètre Λ est différente dans ces deux approximations ; en particulier, pour le cas LL(Q^2), une variation de la valeur de ce paramètre induit une variation d'ordre ${\alpha_S}^2$ sur la valeur de α_S, ce qui est une limitation formelle dans la dérivation de $\Lambda = \Lambda_{QCD}$ à cette approximation.

Le domaine de validité théorique des équations DGLAP est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_S(Q^2)\ln(Q^2/Q_0^2) &\sim 1 \\ \alpha_S(Q^2)\ln(1/x) &\ll 1 \\ \alpha_S(Q^2) &\ll 1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Il est alors intéressant de réécrire les équations DGLAP en effectuant le changement de variable suivant ($Q^2 \to t$) :

$$t = \int_{Q_0^2}^{Q^2}\frac{dk^2}{k^2}\frac{\alpha_S(k^2)}{2\pi} \tag{4.7}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Sigma(x,t)}{\partial t} &= \int_x^1\frac{dy}{y}\left[\Sigma(y,t)P_{qq}(\frac{x}{y}) + 2N_f g(y,t)P_{qg}(\frac{x}{y})\right] \\ \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} &= \int_x^1\frac{dy}{y}\left[\Sigma(y,t)P_{gq}(\frac{x}{y}) + g(y,t)P_{gg}(\frac{x}{y})\right] \\ \frac{\partial q_{NS}(x,t)}{\partial t} &= \int_x^1\frac{dy}{y}q_{NS}(y,t)P_{NS}(\frac{x}{y}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

La dépendance en $\alpha_S(Q^2)$ est ainsi *absorbée* dans le changement de variable ci-dessus, ce qui simplifie ultérieurement la résolution de ces équations. Les fonctions de splitting deviennent :

$$\begin{aligned} P(z) &= P^{(0)}(z) + \frac{\alpha_S(t)}{2\pi} R(z) \\ R(z) &= P^{(1)}(z) - \frac{51 - \frac{19N_f}{3}}{11 - \frac{2N_f}{3}} P^{(0)}(z) \end{aligned}$$

où le terme $R(z)$ est une correction NLL(Q^2) [3], [4], [5].

4.1.2 Position du problème

Le problème que nous nous posons maintenant est le suivant : Comment calculer l'évolution de conditions initiales données par le système (4.8)? Il y a trois types de réponses possibles :

- résolution de ce système par une méthode polynomiale [6] ;
- résolution du système (4.8) par une méthode d'Euler adaptée aux équations intégro-différentielles, cette méthode peut éventuellement être optimisée en tenant compte des spécificités du noyau DGLAP [7] ;
- résolution de ce système après transformation de Mellin-Laplace [8].

Nous proposons dans la suite une description de la première et de la deuxième voies ainsi que des résultats que nous avons obtenus en développant ces deux techniques [9].

Nous traitons, dans un premier temps, la méthode polynomiale et nous montrons comment le système (4.8) peut se résoudre après le développement des fonctions du problème sur les polynômes de Laguerre. Pour cette méthode, nos résultats concernent essentiellement l'approximation LL(Q^2) des équations DGLAP, nous donnons des perspectives pour l'étendre à l'approximation suivante. Dans un deuxième temps, nous décrivons la résolution de type Euler des équations DGLAP (NLL(Q^2)), laquelle nous sert dans la suite pour conduire une analyse de ces équations d'évolution.

4.1.3 Résolution par la méthode des polynomes de Laguerre

Définition

Les polynomes de Laguerre sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} (n+1)L_{n+1}(x) &= (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) && (4.9) \\ L_0(x) &= 1 && (4.10) \\ L_1(x) &= 1-x && (4.11) \end{aligned}$$

Ils vérifient alors la propriété d'orthogonalité :

$$\int_0^\infty dx' e^{-x'} L_n(x') L_m(x') = \delta_{n,m} \qquad (4.12)$$

Toute fonction intégrable f, telle que $\int_0^\infty dx' e^{-x'} L_n(x') f(e^{-x'})$ existe pour tout $n \in IN$, admet un développement sur ces polynomes de la forme :

$$f(e^{-x'}) = \sum_{n=0}^{N} f_n L_n(x') \tag{4.13}$$

Cette équation décrit le développement de la fonction $x \to f(e^{-x})$ à l'ordre N, on montre ensuite que cette série converge pour tout N et que les coefficients f_n sont déterminés comme suit (par la relation (4.12)) :

$$f_n = \int_0^\infty dx' e^{-x'} L_n(x') f(e^{-x'}) \tag{4.14}$$

Rigoureusement, nous devons écrire la formule (4.13) en précisant l'ordre N du développement : $f_N(e^{-x'}) = \sum_{n=0}^{N} f_n L_n(x')$, alors $f(e^{-x'}) = f_{N\to\infty}(e^{-x'})$. Cependant, on montre dans la suite que les propriétés asymptotiques des polynomes de Laguerre assurent que pour N suffisamment grand ($N \geq 25$) on obtient une convergence numérique telle que :

$$f(e^{-x'}) \simeq \sum_{n=0}^{N\geq 25} f_n L_n(x') \tag{4.15}$$

On peut donc omettre l'ordre N ($N \geq 25$) de la série de Laguerre d'une fonction intégrable.

Propriétés

Nous donnons ici deux propriétés importantes vérifiées par les polynomes de Laguerre qui se révèlent très utiles dans la suite :

$$\int_0^{x'} dy' L_n(x'-y') L_m(y') = L_{n+m}(x') - L_{n+m+1}(x') \tag{4.16}$$

$$L_{n\gg 1}(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} x^{-\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{4}} cos\left[2(nx)^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4}\right] + \mathcal{O}(n^{-\frac{3}{4}}) \tag{4.17}$$

Cette dernière égalité légitime les développements à un ordre N donné des séries de Laguerre. On montre dans notre analyse que la convergence numérique est obtenue pour $N \geq 25$.

Il est alors possible de réaliser notre objectif d'utiliser une méthode polynomiale de résolution des équations intégro-différentielles DGLAP (4.8). Nous exposons cette procédure dans les paragraphes suivants, nous développons nos arguments dans le cas LL(Q^2), puis nous montrons comment les étendre à l'ordre supérieur.

Evolution DGLAP : cas non-singlet

La partie non-singlet des équations DGLAP (4.8) s'écrit :

$$\frac{\partial x q_{NS}(x,t)}{\partial t} = \int_x^1 \frac{dy}{y} y q_{NS}(y,t) \frac{x}{y} P_{qq}(\frac{x}{y}) \tag{4.18}$$

Il est alors possible d'effectuer la transformation suivante :

$$H_{qq}(z) = zP_{qq}(z) \tag{4.19}$$

L'équation (4.18) devient :

$$\frac{\partial xq_{NS}(x,t)}{\partial t} = \int_x^1 \frac{dy}{y} yq_{NS}(y,t) H_{qq}(\frac{x}{y}) \tag{4.20}$$

Cette modification peut sembler arbitraire, mais elle se justifie pour des raisons techniques, il est plus aisé de calculer les coefficients de Laguerre de la fonction H_{qq} que de la fonction P_{qq}. Cette dernière équation contient alors deux types d'*informations* :

- d'une part la condition initiale $xq_{NS}(x, t = 0)$;
- d'autre part l'évolution contrôlée par le noyau de cette équation (4.20).

Nous cherchons à décomposer ce problème en séparant mathématiquement ces deux *informations*, c'est-à-dire en scindant la formule (4.20) en deux égalités distinctes. Pour ce faire, on introduit un opérateur d'évolution U_{qq} :

$$\begin{aligned} xq_{NS}(x,t) &= \int_x^1 \frac{dy}{y} U_{qq}(\frac{x}{y}, t) yq_{NS}(y,0) && (4.21) \\ \frac{\partial U_{qq}(x,t)}{\partial t} &= \int_x^1 \frac{dy}{y} U_{qq}(y,t) H_{qq}(\frac{x}{y}) && (4.22) \end{aligned}$$

ce qui réalise le premier objectif de *simplification-séparation* du problème, l'évolution DGLAP non-singlet s'opère sur U_{qq}, puis $xq_{NS}(x,t)$ est complètement déterminée par la condition initiale et l'opérateur évolué. De plus, la condition initiale pour l'opérateur d'évolution $U_{qq}(z,0)$ est calculée par la relation suivante ((4.22) avec $t = 0$) :

$$xq_{NS}(x,0) = \int_x^1 \frac{dy}{y} U_{qq}(\frac{x}{y}, 0) yq_{NS}(y,0) \tag{4.23}$$

soit $U_{qq}(z,0) = \delta(1-z)$. Le problème est maintenant posé et nous allons utiliser des développements de Laguerre pour résoudre dans un premier temps l'équation (4.22) puis l'équation (4.21).

On introduit deux variables x' et y' :

$$x' = -\ln x \qquad y' = -\ln y$$

L'évolution de l'opérateur U_{qq} (4.22) s'écrit :

$$\frac{\partial U_{qq}(e^{-x'}, t)}{\partial t} = \int_x^1 dy' U_{qq}(e^{-y'}, t) H_{qq}(e^{-(x'-y')}) \tag{4.24}$$

On développe en série de Laguerre les différents termes de cette équation :

$$\begin{aligned} H_{qq}(e^{-z'}) &= \sum_n H_{qq,n} L_n(z') \\ U_{qq}(e^{-x'}, t) &= \sum_n U_{qq,n}(t) L_n(x') && (4.25) \end{aligned}$$

où les coefficients de Laguerre sont calculés par l'équation (4.14) :

$$\begin{aligned} H_{qq,n} &= \int_0^\infty dz' e^{-z'} L_n(z') H_{qq}(e^{-z'}) \\ U_{qq,n}(t) &= \int_0^\infty dx' e^{-x'} L_n(x') U_{qq}(e^{-x'}, t) \end{aligned}$$

Après ces développements, l'équation (4.24) devient, en utilisant la propriété (4.16) :

$$\sum_n \frac{\partial U_{qq,n}(t)}{\partial t} L_n(x') = \sum_{n_1,n_2} H_{qq,n_1} U_{qq,n_2}(t) \left[L_{n_1+n_2}(x') - L_{n_1+n_2+1}(x') \right] \qquad (4.26)$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{qq,n}(t)}{\partial t} &= \sum_{m=0}^{n} U_{qq,m}(t) \delta H_{qq,n-m} &\quad (4.27) \\ \delta H_{qq,n-m} &= H_{qq,n-m} - H_{qq,n-m-1} &\quad (4.28) \end{aligned}$$

♣ Cette formule de récurrence, avec la condition initiale $U_{qq}(x,0) = \delta(1-x)$ qui donne $U_{qq,n}(0) = 1$, se résoud pas à pas et permet d'extraire $U_{qq,n\in I\!N}$.

♣ On peut ensuite calculer $xq_{NS}(x,t)$ en utilisant l'équation (4.21) :

$$xq_{NS}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} \left[U_{qq,n-m}(t) - U_{qq,n-m-1}(t) \right] \left(xq_{NS} \right)_m (t=0) L_n(-\ln x) \qquad (4.29)$$

avec :

$$\left(xq_{NS} \right)_m (t=0) = \int_0^\infty dx' e^{-x'} L_m(x') e^{-x'} q_{NS}(e^{-x'}, t=0)$$

La série précédente est tronquée à une valeur de $n = N$, mais comme nous l'avons déjà souligné, le comportement asymptotique de $L_{n \gg 1}(x)$ légitime cette limitation dès que $N \geq 25$; en pratique, nous prenons $N = 30$.

L'intérêt de la procédure que nous venons de développer est explicite sur la formule (4.29) ; dans cette dernière, les termes en $U_{qq,p}(t)$ sont déterminés exactement par la formule de récurrence (4.27), ils sont de la forme $U_{qq,p}(t) = e^{(H_{qq,0})t} \left(P_p(t) \right)$ où $P_p(t)$ est un polynome d'ordre p, on trouve donc leur expression exacte quel que soit p. Ainsi, pour une condition initiale non-singlet donnée, on détermine dans un premier temps les coefficients $\left(xq_{NS} \right)_m (t=0)$, dans un deuxième temps, on effectue la somme (4.29) et on obtient $xq_{NS}(x,t)$.

Evolution DGLAP : cas singlet

La partie singlet des équations DGLAP (4.8) se résoud de manière similaire par la méthode polynomiale. On écrit d'abord les équations DGLAP-singlet (4.8) :

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} x\Sigma(x,t) \\ xg(x,t) \end{pmatrix}}{\partial t} = \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{x}{y} \begin{pmatrix} y\Sigma(y,t) \\ yg(y,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{qq}(\frac{x}{y}) & 2N_f P_{qg}(\frac{x}{y}) \\ P_{gq}(\frac{x}{y}) & P_{gg}(\frac{x}{y}) \end{pmatrix} \qquad (4.30)$$

On effectue alors la tansformation $H_{\alpha\beta}(z) = zP_{\alpha\beta}(z)$ qui conduit à :

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} x\Sigma(x,t) \\ xg(x,t) \end{pmatrix}}{\partial t} = \int_x^1 \frac{dy}{y} \begin{pmatrix} y\Sigma(y,t) \\ yg(y,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{qq}(\frac{x}{y}) & 2N_f H_{qg}(\frac{x}{y}) \\ H_{gq}(\frac{x}{y}) & H_{gg}(\frac{x}{y}) \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

Sur cette expression (4.31), on cherche, comme précédemment, à décomposer le problème en isolant les informations relatives aux conditions initiales et au noyau de l'évolution des équations (4.31) ; on définit 4 opérateurs d'évolution et on déduit :

$$\begin{pmatrix} x\Sigma(x,t) \\ xg(x,t) \end{pmatrix} = \int_x^1 \frac{dy}{y} \begin{pmatrix} U_{qq}(\frac{x}{y},t) & U_{qg}(\frac{x}{y},t) \\ U_{gq}(\frac{x}{y},t) & U_{gg}(\frac{x}{y},t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\Sigma(y,0) \\ yg(y,0) \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} U_{qq}(x,t) & U_{qg}(x,t) \\ U_{gq}(x,t) & U_{gg}(x,t) \end{pmatrix}}{\partial t} = \int_x^1 \frac{dy}{y} \begin{pmatrix} U_{qq}(y,t) & U_{qg}(y,t) \\ U_{gq}(y,t) & U_{gg}(y,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{qq}(\frac{x}{y}) & 2N_f H_{qg}(\frac{x}{y}) \\ H_{gq}(\frac{x}{y}) & H_{gg}(\frac{x}{y}) \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

avec les conditions initiales $U_{\alpha\beta}(z,0)$ déterminées par le système suivant :

$$\begin{pmatrix} x\Sigma(x,0) \\ xg(x,0) \end{pmatrix} = \int_x^1 \frac{dy}{y} \begin{pmatrix} U_{qq}(\frac{x}{y},0) & U_{qg}(\frac{x}{y},0) \\ U_{gq}(\frac{x}{y},0) & U_{gg}(\frac{x}{y},0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\Sigma(y,0) \\ yg(y,0) \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

La résolution du système ((4.32),(4.33)) suit les mêmes principes que pour le cas non-singlet.

♣ On dérive d'abord la relation de récurrence qui concerne les opérateurs d'évolution (4.33) :

$$\frac{\partial \begin{pmatrix} U_{qq,n}(t) & U_{qg,n}(t) \\ U_{gq,n}(t) & U_{gg,n}(t) \end{pmatrix}}{\partial t} = \sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} U_{qq,m}(t) & U_{qg,m}(t) \\ U_{gq,m}(t) & U_{gg,m}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H_{qq,n-m} & 2N_f \delta H_{qg,n-m} \\ \delta H_{gq,n-m} & \delta H_{gg,n-m} \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

avec :

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta,n} &= \int_0^\infty dz' e^{-z'} L_n(z') H_{\alpha\beta}(e^{-z'}) \\ U_{\alpha\beta,n}(t) &= \int_0^\infty dx' e^{-x'} L_n(x') U_{\alpha\beta}(e^{-x'},t) \\ \delta H_{\alpha\beta,n-m} &= H_{\alpha\beta,n-m} - H_{\alpha\beta,n-m-1} \end{aligned}$$

♣ On déduit ensuite les distributions $x\Sigma(x,t)$ et $xg(x,t)$ en fonction de leurs conditions initiales (4.32) et des opérateurs évolués :

$$\begin{pmatrix} x\Sigma(x,t) \\ xg(x,t) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} U_{qq,n-m}(t) - U_{qq,n-m-1}(t) & U_{qg,n-m}(t) - U_{qg,n-m-1}(t) \\ U_{gq,n-m}(t) - U_{gq,n-m-1}(t) & U_{gg,n-m}(t) - U_{gg,n-m-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x\Sigma)_m(t=0) \\ (xg)_m(t=0) \end{pmatrix} L_n(-\ln x) \tag{4.36}$$

avec :

$$\begin{pmatrix} (x\Sigma)_m(t=0) \\ (xg)_m(t=0) \end{pmatrix} = \int_0^\infty dx' e^{-x'} L_m(x') \begin{pmatrix} e^{-x'}\Sigma(e^{-x'},t=0) \\ e^{-x'}g(e^{-x'},t=0) \end{pmatrix}$$

Synthèse

la résolution des équations DGLAP (LL(Q^2)) par la méthode des polynomes de Laguerre ($L_n(x)$) fournit ainsi un système de relations fondamentales :

$$\begin{aligned}
xq_{NS}(x,t) &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n} \left[U_{qq,n-m}(t) - U_{qq,n-m-1}(t)\right](xq_{NS})_m\,(t=0)L_n(-\ln x) \\
\begin{pmatrix} x\Sigma(x,t) \\ xg(x,t) \end{pmatrix} &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} U_{qq,n-m}(t) - U_{qq,n-m-1}(t) & U_{qg,n-m}(t) - U_{qg,n-m-1}(t) \\ U_{gq,n-m}(t) - U_{gq,n-m-1}(t) & U_{gg,n-m}(t) - U_{gg,n-m-1}(t) \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} (x\Sigma)_m(t=0) \\ (xg)_m(t=0) \end{pmatrix} L_n(-\ln x)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

où les différents $U_{\alpha\beta,p}(t)$ sont déterminés par les relations de récurrence (4.27) et (4.35), ils sont calculables explicitement en fonctions des $H_{qq,k}$. Nous nous limitons à des développements à 30 polynômes de Laguerre. Il suffit donc d'exprimer -une fois pour toute- les 30 premiers d'entre eux. Réaliser une évolution DGLAP se résume alors à deux étapes :

- d'abord, calculer les coefficients de Laguerre des distributions initiales ;
- ensuite, effectuer la somme sur m et n de (4.37) pour laquelle les coefficients de Laguerre des distributions initiales apparaissent en facteur de fonctions connues.

Les expressions analytiques des transformées de Laguerre des fonctions $H_{\alpha\beta}(z)$ (LL(Q^2)) sont les suivantes :

$$H_{qq,n} = -(\frac{4}{3})^2\delta_{n,0} + \frac{8}{3}\theta(n)\left[Z(n) + \frac{1}{4}(3 - (\frac{1}{2})^n - (\frac{2}{3})^{n+1})\right] \tag{4.38}$$

$$H_{qg,n} = \frac{1}{2}\left[(\frac{1}{2})^{n+1} - (\frac{2}{3})^{n+1} + \frac{2}{3}(\frac{3}{4})^{n+1}\right] \tag{4.39}$$

$$H_{gq,n} = (\frac{4}{3})^2\delta_{n,0} + \frac{8}{3}\theta(n)\left[-(\frac{1}{2})^{n+1} + \frac{1}{4}(\frac{2}{3})^{n+1}\right] \tag{4.40}$$

$$H_{gg,n} = -\frac{N_f}{3}\delta_{n,0} + \theta(n)\left[6\left(Z(n) - (\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n+1} - \frac{1}{3}(\frac{3}{4})^{n+1}\right) + \left(\frac{11}{2} - \frac{N_f}{3}\right)\right] \tag{4.41}$$

avec $Z(n) = \sum_{m=1}^{n} C_n^m(-1)^m\zeta(m+1)$ et $\theta(n) = 1 - \delta_{n,0}$.

Notre discussion sur la résolution des équations DGLAP par une méthode polynomiale ne saurait être complète si nous ne donnions pas quelques éléments d'extension pour le traitement de l'approximation NLL(Q^2). Dans les lignes qui suivent, nous montrons que le formalisme précédent peut être développé à cette approximation. L'isomorphisme des équations DGLAP dans les limites LL(Q^2) et NLL(Q^2) permet de reproduire complètement la structure des raisonnements précédents ; par exemple, pour le cas non-singlet, nous pouvons définir un opérateur d'évolution -de même qu'en (4.22)-, lequel vérifie l'équation :

$$\frac{\partial U_{NS}(x,t)}{\partial t} = \int_x^1 \frac{dy}{y}\left(\frac{x}{y}P_{NS}^{(0)}(\frac{x}{y}) + \frac{\alpha_S(t)}{2\pi}\frac{x}{y}R(\frac{x}{y})\right)U_{NS}(y,t) \tag{4.42}$$

On décompose ensuite $U_{NS}(x,t)$ comme suit :

$$U_{NS}(x,t) = U^{(0)}_{NS}(x,t) + \frac{\alpha_S(0)}{2\pi} U^{(1)}_{NS}(x,t) \tag{4.43}$$

On identifie alors les différents ordres, l'équation (4.42) devient :

$$\frac{\partial U^{(0)}_{NS}(x,t)}{\partial t} = \int_x^{(1)} \frac{dy}{y} \left(\frac{x}{y} P^{(0)}_{NS}(\frac{x}{y}) \right) U^{(0)}_{NS}(y,t) \tag{4.44}$$

$$\frac{\partial U^{(1)}_{NS}(x,t)}{\partial t} = \int_x^{(1)} \frac{dy}{y} \left(\frac{x}{y} P^{(0)}_{NS}(\frac{x}{y}) \right) U^{(1)}_{NS}(y,t) + \frac{\alpha_S(t)}{\alpha_S(0)} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left(\frac{x}{y} R(\frac{x}{y}) \right) U^{(0)}_{NS}(y,t) \tag{4.45}$$

On résoud ce sytème en deux étapes :

- on résoud d'abord l'équation (4.44) en développant les différentes fonctions en série de Laguerre, exactement comme nous l'avons montré dans les paragraphes précédents, on en déduit $U^{(0)}_{NS,m}(t)$ pour tout m, donc $U^{(0)}_{NS}(x,t)$;
- ensuite, on reporte cette solution dans l'équation (4.45) que l'on transforme également en série de Laguerre. On en déduit $U^{(1)}_{NS,m}(t)$ pour tout m, donc $U^{(1)}_{NS}(x,t)$.

La solution générale pour $xq_{NS}(x,t)$ reste de la forme (4.29). Bien sûr, une difficulté majeure de cette approche est de calculer les transformées de Laguerre des fonctions $R(z)$, qui sont sensiblement plus complexes que les fonctions splitting LL(Q^2) ; mais, comme nous venons de le montrer, le principe de la méthode est le même, la seule différence étant que la relation de récurrence utilisée dans le cas LL(Q^2) pour obtenir l'opérateur d'évolution est, dans la limite NLL(Q^2), décomposée en deux récurrences distinctes pour les premier et deuxième ordres.

4.1.4 Résolution par une méthode d'Euler

Pour cette méthode, nous discrétisons les variables x et t des équations DGLAP (4.8), c'est-à-dire que l'intervalle de x de ($x \subset [x_{min}, 1]$) est divisé en N_x sous-intervalles -logarithmiquement équidistants ($\Delta(log_{10}x) = |log_{10}x_{min}|/N_x$)- et la variation sur t est effectuée par variations élémentaires de Δt. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{df(x)}{dx} = [f(x_{m+1}) - f(x_m)]/\Delta x_m$$

$$\int dx f(x) = \sum_{m=1}^{N_x} \Delta x_m f(x_m)$$

Les équations DGLAP (4.8) décrivant l'évolution des distributions $q_{NS}(x,t)$,$\Sigma(x,t)$ et $g(x,t)$ de $t = t_j$ à $t' = t_{j+1} = t_j + \Delta t_j$ pour une valeur $x = x_k$ deviennent alors :

$$q_{NS}(x_k, t_{j+1}) = q_{NS}(x_k, t_j) \quad + \quad \Delta t_j \sum_{m=k}^{N_x} \frac{\Delta x_m}{x_m} P_{NS}\left(\frac{x_k}{x_m}\right) q_{NS}(x_m, t_j)$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma(x_k, t_{j+1}) = \Sigma(x_k, t_j) \quad &+ \quad \Delta t_j \sum_{m=k}^{N_x} \frac{\Delta x_m}{x_m} P_{qq}\left(\frac{x_k}{x_m}\right) \Sigma(x_m, t_j) \\
&+ \quad 2N_f \Delta t_j \sum_{m=k}^{N_x} \frac{\Delta x_m}{x_m} P_{qg}\left(\frac{x_k}{x_m}\right) g(x_m, t_j) \\
g(x_k, t_{j+1}) = g(x_k, t_j) \quad &+ \quad \Delta t_j \sum_{m=k}^{N_x} \frac{\Delta x_m}{x_m} P_{gq}\left(\frac{x_k}{x_m}\right) \Sigma(x_m, t_j) \\
&+ \quad \Delta t_j \sum_{m=k}^{N_x} \frac{\Delta x_m}{x_m} P_{gg}\left(\frac{x_k}{x_m}\right) g(x_m, t_j)
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

Il est ainsi possible d'évoluer des distributions initiales exprimées à $t = t_0$ et à différentes valeurs de $x = (x_m)_{(m \subset [1, N_x])}$: $q_{NS}(x_m, t_0)$,$\Sigma(x_m, t_0)$ et $g(x_m, t_0)$. On obtient $q_{NS}(x_m, t)$,$\Sigma(x_m, t)$ et $g(x_m, t)$ quel que soit t après N_t itérations.

4.1.5 Résultats et commentaires

Nous allons maintenant illustrer le fonctionnement des méthodes de résolution que nous proposons -méthode d'Euler et méthode polynomiale- sur un exemple pratique. Nous définissons ainsi des distributions partoniques de type singlet et non singlet à une valeur de Q_0^2 donnée (conditions initiales), puis nous résolvons les équations DGLAP (4.1) à l'approximation LL(Q^2) -méthode polynomiale- et NLL(Q^2) -méthode d'Euler- à partir de ces conditions initiales. Nous évaluons de la sorte la consistance de nos deux méthodes-programmes d'évolution et nous comparons aussi avec les résultats obtenus avec les mêmes hypothèses d'un autre code d'évolution QCD, celui du groupe MRS [10]. Comme nous le verrons, l'accord est remarquable. Dans le même temps, nous interprétons physiquement la dynamique de l'évolution DGLAP que nous déduisons sur cet exemple à partir de notre code d'évolution QCD.

Ensuite, nous montrons comment déduire la fonction de structure F_2 à partir des distributions de partons ; lors de cette discussion nous présentons les différentes prescriptions possibles pour le traitement des quarks lourds et nous expliquons le choix que nous adoptons pour l'analyse développée ci-dessous.

Finalement, nous présentons les différentes formes analytiques usuellement proposées pour paramétriser les distributions de partons ; là encore, nous expliquons et justifions notre choix.

Exemples d'évolution

Rappelons brièvement les deux programmes d'évolution que nous proposons :

- Dans l'approximation LL(Q^2), nous utilisons la méthode des polynômes de Laguerre qui nous permet de calculer l'évolution en Q^2 de distributions de type singlet couplées à la distribution de gluons et de type non-singlet. Dans cette approximation, nous utilisons l'expression LL(Q^2) de α_S :

$$
\alpha_S^0(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln^2(\frac{Q^2}{\Lambda^2})}\right) \tag{4.47}
$$

A_g	B_g	C_g	D_g	E_g	A_u	B_u	C_u	D_u	E_u
1.94	−0.17	5.33	4.07	−1.90	2.26	0.56	3.96	4.65	−0.54
A_S	B_S	C_S	D_S	E_S	A_d	B_d	C_d	D_d	E_d
0.96	−0.17	9.63	11.2	−2.55	0.279	0.34	4.46	1.93	6.80

TAB. 4.1 – *Valeurs des paramètres à $Q^2 = 4$ GeV ^{2} pour les paramétrisations (4.49).*

Dans cette équation, Λ est tel que α_S reste continu à chaque seuil en Q^2, pour lequel une nouvelle génération de quark est supposée intervenir[2], c'est-à-dire que la valeur de Λ est discontinue au passage d'un seuil quelconque [11].

- Dans l'approximation NLL(Q^2), nous utilisons la méthode d'Euler. Dans ce cas, nous traitons α_S en le calculant pour chaque Q^2 par résolution de l'équation différentielle qu'il vérifie moyennant une valeur initiale donnée :

$$\begin{aligned} Q^2\frac{d\alpha_s(Q^2)}{dQ^2} &= -\frac{\beta_0}{4\pi}{\alpha_S}^2 - \frac{\beta_1}{(4\pi)^2}{\alpha_S}^3 \\ \beta_0 &= 11 - \frac{2N_f}{3} \\ \beta_1 &= 102 - \frac{38N_f}{3} \end{aligned} \tag{4.48}$$

Alors, comme cette équation différentielle dépend de N_f, elle change à chaque seuil avec la valeur du nombre de saveurs, la continuité de α_S étant imposée.

Considérons les distributions initiales suivantes pour $Q_0^2 = 4$ GeV ^{2} [12] :

$$\begin{aligned} xu_v(x,Q_0^2) &= A_u x^{B_u}(1-x)^{C_u}(1+D_u x + E_u\sqrt{x}) \\ xd_v(x,Q_0^2) &= A_d x^{B_d}(1-x)^{C_d}(1+D_d x + E_d\sqrt{x}) \\ xS(x,Q_0^2) &= A_S x^{B_S}(1-x)^{C_S}(1+D_S x + E_S\sqrt{x}) \\ xg(x,Q_0^2) &= A_g x^{B_g}(1-x)^{C_g}(1+D_g x + E_g\sqrt{x}) \end{aligned} \tag{4.49}$$

Dans ces formules, xu_v et xd_v caractérisent des distributions de type non-singlet relatives aux quarks de valence u et d, $xS = 2(\bar{u} + \bar{d} + \bar{s} + \bar{c})$ caractérise une distribution de type singlet relative aux quarks de la mer et couplée à la distribution de gluons xg.

Nous prenons également $\Lambda(N_f = 4) = 0.231$ GeV soit $\alpha_S(M_Z^2) = 0.113$. On utilise les valeurs données dans la table (4.1) pour définir les coefficients introduits dans les paramétrisations ci-dessus.

Nous effectuons alors les évolutions LL(Q^2) et NLL(Q^2) décrites ci-dessus, les résultats que nous obtenons sont présentés sur la fig. 4.1, pour xg et xS, et sur la fig. 4.2, pour xu_v et xd_v.

Il ressort de ces figures que les deux programmes sont parfaitement compatibles : nous serons amenés à quantifier plus précisément cette compatibilité dans la suite de notre étude. L'approximation LL(Q^2) décrit donc bien la dynamique satisfaite par les distributions partoniques. Cependant, comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre, α_S n'est pas défini de manière consistante à cet ordre, ce qui limite la valeur prédictive de cette approximation.

---

[2] Nous définissons les seuils comme suit : $N_f = 3$ pour $Q^2 \leq m_c^2$,$N_f = 4$ pour $m_c^2 \leq Q^2 \leq m_b^2$

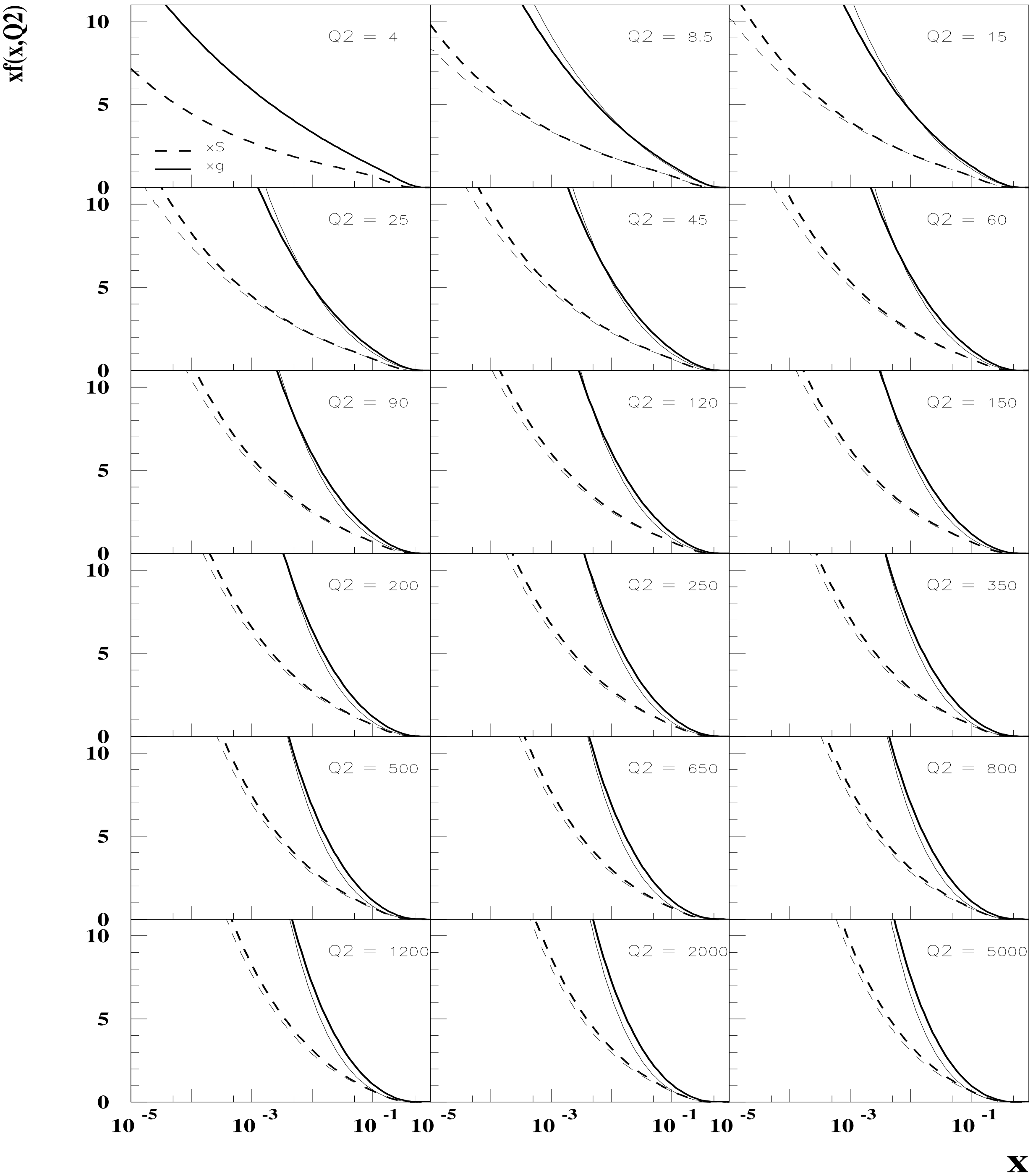


FIG. 4.1 – *Résultat du calcul d'évolution pour différentes valeurs de* Q^2(GeV ^{2}) *des distributions* xS *et* xg *(voir équations (4.49) et table (4.1)). Ces distributions sont représentées à partir de leur expression analytique initiale pour* $Q^2 = 4$ GeV ^{2}, *de plus* xg *(trait plein) et* xS *(trait discontinu) sont tracées pour les deux types d'évolution : LL(*Q^2*) -méthode polynomiale- (trait fin) et NLL(*Q^2*) -méthode d'Euler- (trait gras). L'accord entre les deux approximations est très satisfaisant.*

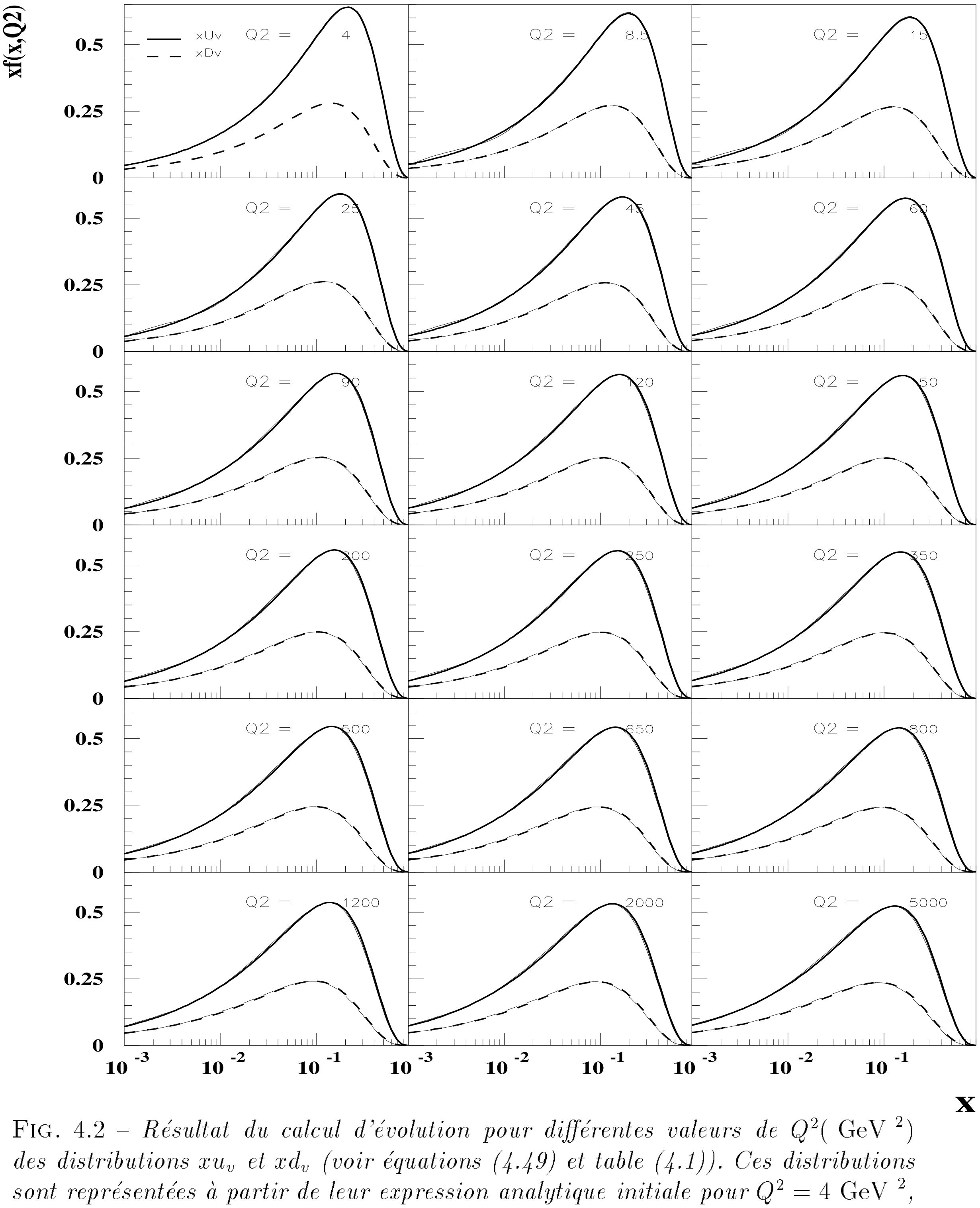


FIG. 4.2 – *Résultat du calcul d'évolution pour différentes valeurs de* Q^2(GeV ^{2}) *des distributions* xu_v *et* xd_v *(voir équations (4.49) et table (4.1)). Ces distributions sont représentées à partir de leur expression analytique initiale pour* $Q^2 = 4$ GeV ^{2}, *de plus* xu_v *(trait plein) et* xd_v *(trait discontinu) sont tracées pour les deux types d'évolution : LL(*Q^2*) -méthode polynomiale- (trait fin) et NLL(*Q^2*) -méthode d'Euler- (trait gras). L'accord entre ces deux approximations est remarquable.*

Interprétation

On regroupe sur la fig. 4.3 l'évolution de l'ensemble des quatre distributions partoniques définies dans ce paragraphe (équations (4.49) et table des paramètres (4.1)). Sur cette figure, nous représentons uniquement l'évolution à l'approximation NLL(Q^2). Il s'agit d'une illustration de la dynamique de l'évolution DGLAP : quand Q^2 augmente, on observe une déplétion de quarks à grand x ($x \geq 0.1$) et une accumulation consécutive à bas x ($x \leq 0.1$) ; ainsi, quand Q^2 augmente, la contribution des quarks de valence diminue au profit d'une augmentation de plus en plus prononcée de la contribution des quarks de la mer associés à la contribution gluonique.

La fig. 4.4 présente également cette propriété d'une manière un peu différente : nous y représentons le résultat de l'évolution NLL(Q^2) pour les distributions x^2u_v, x^2d_v, x^2S et x^2g à différentes valeurs de Q^2, l'echelle des abscisses étant logarithmique. Comme pour une fonction f régulière, nous pouvons écrire $x^2fd\log x = xfdx$; cette figure illustre l'évolution en fonction de Q^2 de la fraction d'impulsion x à dx près emportée par les distributions partoniques représentées.

Comparaison

Sur la fig. 4.5 nous présentons la comparaison, pour la distribution xS, entre l'évolution NLL(Q^2) -méthode d'Euler- réalisée à partir des conditions initiales (4.49) associées à la table (4.1) et la paramétrisation MRS (A') [12]. Cette paramétrisation est évaluée par ses auteurs en fonction de leur évolution NLL(Q^2) -programme du groupe MRS- qui suppose également les conditions initiales (4.49) associées à la table (4.1). Nous constatons le très bon accord entre le résultat de notre évolution et la paramétrisation proposée par le groupe MRS. Ainsi, moyennant les approximations nécessaires pour déduire une paramétrisation à partir du résultat d'un code d'évolution QCD, nous pouvons conclure que les deux codes -celui que nous proposons et celui du groupe MRS [12]- sont parfaitement compatibles.

Déduction de F_2 et traitement des quarks lourds

Etant donné des distributions de partons, nous devons en déduire les observables mesurées dans les expériences : en particulier, dans notre étude qui concerne la diffusion profondément inélastique *lepton-nucléon*, nous devons déduire les fonctions de structure du nucléon en fonction des densités de partons qui le compose dans le cadre de la QCD perturbative.

Nous avons déjà répondu partiellement à cette question dans une partie précédente en définissant la fonction de structure $F_2(x, Q^2)$ pour une diffusion inélastique *électron-proton*. A l'ordre LL(Q^2), elle s'écrit :

$$F_2(x, Q^2) = \sum_{i=1}^{N_f} {e_i}^2 x(q_i(x) + \bar{q}_i(x)) \tag{4.50}$$

ce qui devient, à l'ordre supérieur :

$$F_2(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} (\sum_{i=1}^{N_f} C_2^i(y, Q^2)\, q_i(x/y, Q^2) + C_2^g(y, Q^2)\, g(x/y, Q^2)) \tag{4.51}$$

---

et $N_f = 5$ pour $Q^2 \geq m_b^2$

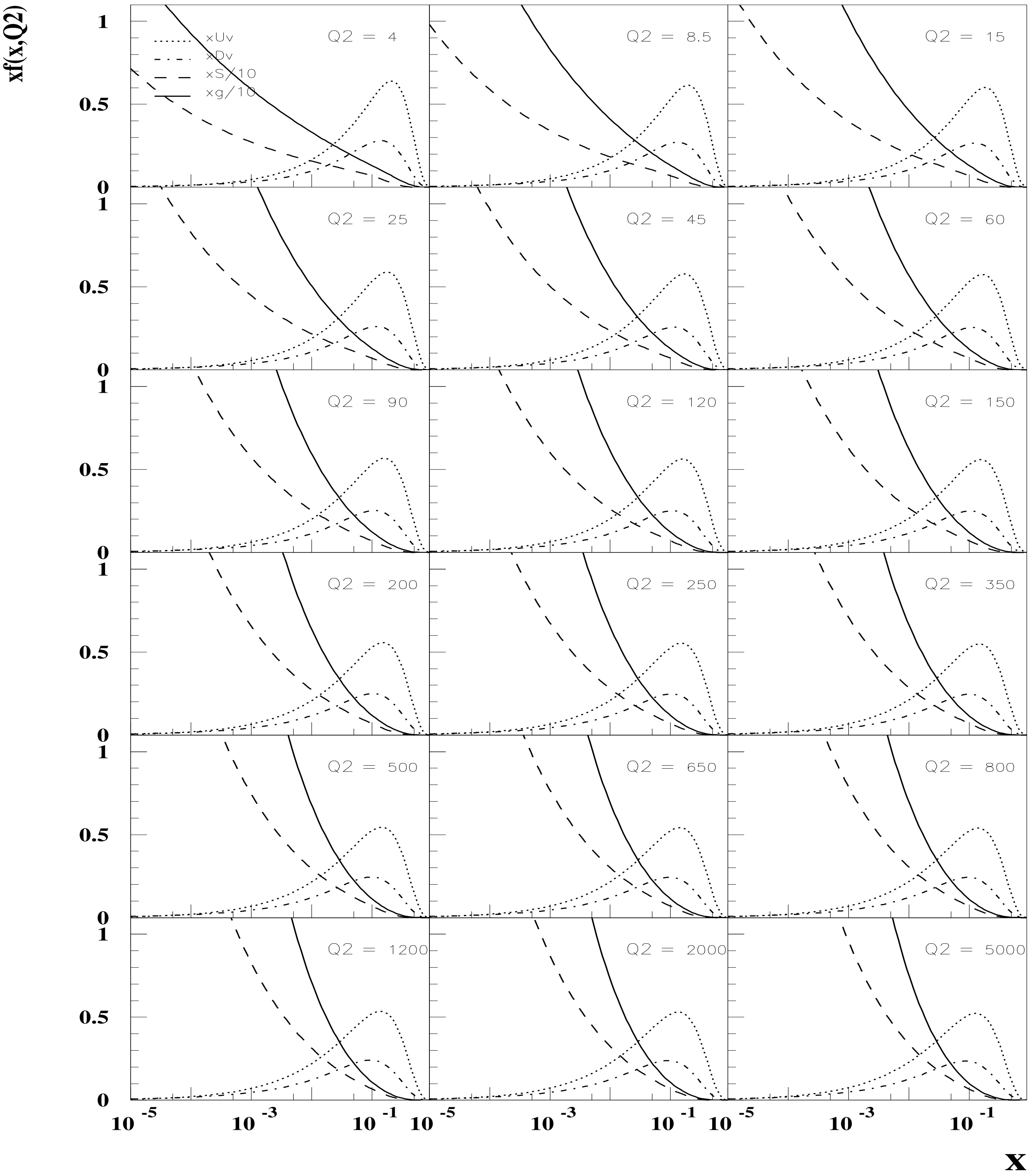


FIG. 4.3 – *Evolution NLL(Q^2) -méthode d'Euler- des quatre distributions partoniques xu_v (trait pointillé),xd_v (trait pointillé discontinu),xS (trait discontinu) et xg (trait plein) définies par les équations (4.49) et la table des paramètres (4.1)), les distributions xS et xg sont divisées par un facteur* 10 *sur cette figure ; différentes valeur de Q^2(* GeV ^{2}*) sont représentées à partir de la valeur initiale d'évolution ($Q^2 = 4$* GeV ^{2}*).*

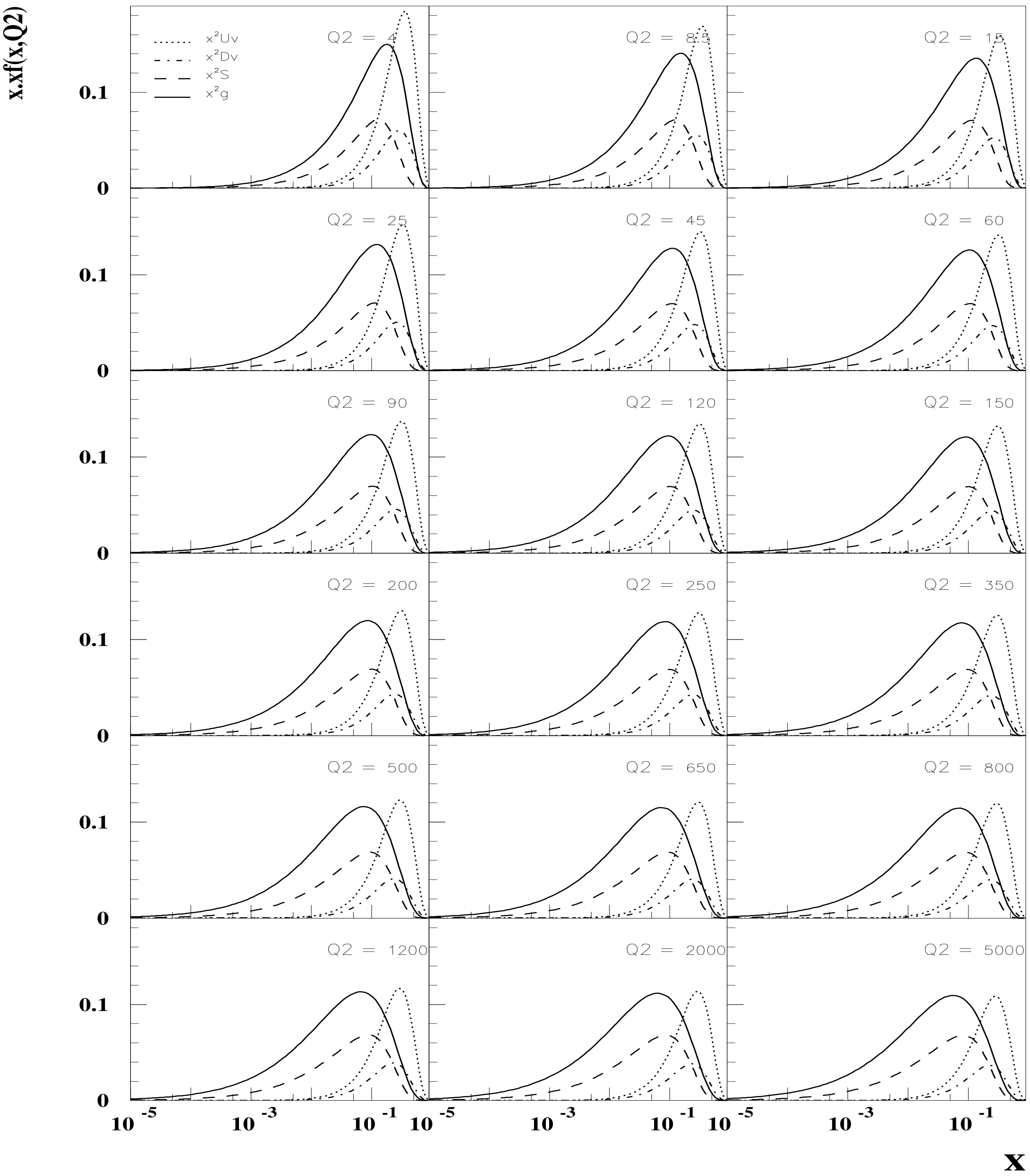


FIG. 4.4 – *Evolution NLL(Q^2) -méthode d'Euler- des quatre distributions suivantes : x^2u_v (trait pointillé) ,x^2d_v (trait pointillé discontinu),x^2S (trait discontinu) et x^2g (trait plein) ; différentes valeurs de Q^2(GeV ^{2}) sont représentées à partir de la valeur initiale d'évolution ($Q^2 = 4$ GeV ^{2}). Remarquons que, pour chacune de ces quatre distributions f, nous pouvons écrire l'égalité $x^2fd\log x = xfdx$ et $xfdx$ désigne la fraction d'impulsion x à dx près emportée par la distribution partonique f, ce graphe repésente donc l'évolution en fonction de Q^2 de la fraction d'impulsion emportée par les différentes formes partoniques introduites par les équations (4.49) et la table des paramètres (4.1).*

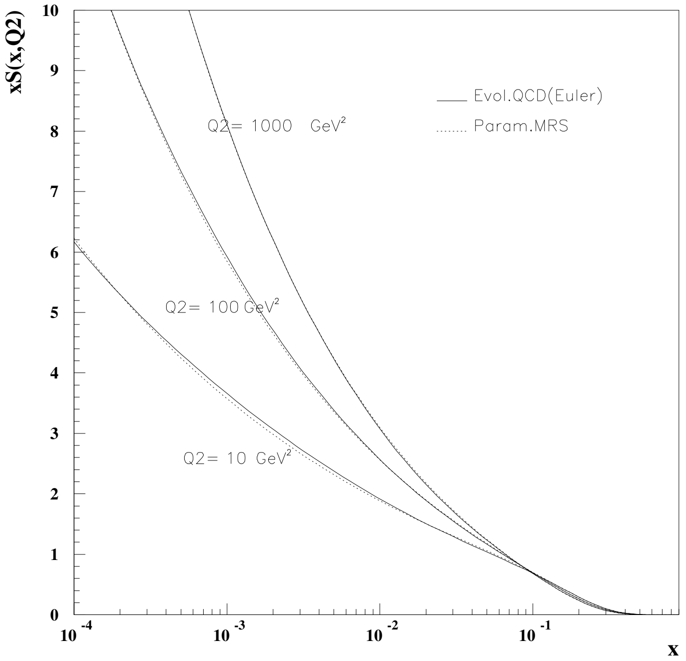


FIG. 4.5 – *Comparaisons pour la distribution* xS *entre l'évolution NLL(*Q^2*) -méthode d'Euler- (trait plein) réalisée à partir des conditions initiales (4.49) associées à la table (4.1) et de la paramétrisation MRS (A′) (trait pointillé) [12]. Cette paramétrisation est évaluée par ses auteurs en fonction de leur évolution NLL(*Q^2*) -programme du groupe MRS- qui suppose également les conditions initiales (4.49) associées à la table (4.1). L'évolution est calculée pour trois valeurs de* Q^2 *(*10 GeV ^{2}*,* 100 GeV ^{2} *et* 1000 GeV ^{2}*, nous constatons le très bon accord entre le résultat de notre évolution et la paramétrisation proposée par le groupe MRS. Ainsi, moyennant les approximations nécessaires pour déduire une paramétrisation à partir du résultat d'un code d'évolution QCD, nous pouvons conclure que les deux codes -celui que nous proposons et celui du groupe MRS- sont parfaitement compatibles.*

où les $C_2^i(y, Q^2), C_2^g(y, Q^2)$ sont des fonctions -coefficients de Wilson- déterminées par le calcul.

Cependant, cette réponse n'est que partielle car les relations (4.50) ou (4.51) supposent implicitement que les masses des quarks sont négligeables, c'est-à-dire que les corrections d'ordre $\mathcal{O}(\frac{m_q^2}{Q^2})$ sont négligeables.

Cette approximation est bien justifiée pour les quarks u,d et s pour des valeurs de $Q^2 \geq 1$ GeV ^{2} ($m_u \simeq 0.005$ GeV , $m_d \simeq 0.01$ GeV et $m_s \simeq 0.3$ GeV).

Elle est certainement moins appropriée pour les quarks c et b, pour les mêmes valeurs de Q^2 ($m_c \simeq 1.5$ GeV et $m_b \simeq 4.75$ GeV).

De plus, il convient de remarquer que les équations DGLAP (4.1) ne peuvent être utilisées que dans l'hypothèse où les masses des quarks sont négligées : en effet, les fonctions de splitting sont calculées dans cette approximation et cela reste un enjeu théorique de savoir exprimer les fonctions de splitting du type P_{cg}, P_{gc}, P_{cc},... au-delà de cette approximation.

Par suite, nous pouvons déjà donner les principes de la détermination de F_2 dans les différents cas :

- Dans l'hypothèse où les masses des quarks lourds (c et b) ne sont pas prises en compte, nous procédons ainsi pour la déduction de F_2 [12], [13] :
    - nous résolvons les équations DGLAP en évoluant quatre saveurs de quark (u,d,s et c) ainsi que la distribution gluonique ;
    - ensuite, nous calculons F_2 avec les quatre saveurs u,d,s et c à l'aide de la formule (4.51) :

      $$F_2 = F_2^{u,d,s,c} + F_2^b \tag{4.52}$$

      Nous pouvons montrer que la contribution du quark b est négligeable dans le problème de physique qui nous intéresse ici, dès lors :

      $$F_2 = F_2^{u,d,s,c} \tag{4.53}$$

- Dans l'hypothèse où les masses des quarks lourds (c et b) sont prises en compte [14], la déduction de F_2 est réalisée comme suit :
    - d'abord, on résoud les équations DGLAP en évoluant les trois saveurs légères u,d et s ainsi que la distribution gluonique ;
    - ensuite, on calcule F_2 avec les trois saveurs légères à l'aide de la formule (4.51) et on utilise un traitement spécial pour introduire les saveurs lourdes dans la fonction de structure, alors :

      $$F_2 = F_2^{u,d,s} + F_2^c + F_2^b \tag{4.54}$$

      la contribution du quark b restant négligeable :

      $$F_2 = F_2^{u,d,s} + F_2^c \tag{4.55}$$

Notons également que, dans tous les cas, l'évolution de α_S est réalisée conformément à la prescription que nous avons exposée dans le paragraphe précédent.

Nous allons maintenant décrire plus précisément les deux approches ci-dessus en justifiant le choix que nous avons fait de la première solution (masses des quarks négligées). Dans ce qui suit, les quarks u,d et s sont supposés de masse nulle et la contribution du quark b est négligée. Notre discussion porte donc essentiellement sur le traitement du quark c.

- Quand Q^2 augmente, les corrections d'ordre $\mathcal{O}(\frac{m_c^2}{Q^2})$ deviennent moins importantes et les équations DGLAP peuvent raisonnablement s'exprimer sous la forme (4.1) pour ce qui concerne l'évolution des distributions xu,xd,xs,xc et xg, c'est-à-dire que le quark c peut être considéré comme un quatrième quark sans masse -pour ce qui est de son évolution en QCD perturbative-. Sa distribution vérifie alors la condition à la limite suivante :

  $$xc(x,Q^2) = 0 \ si \ Q^2 \leq \mu_c^2 \tag{4.56}$$

  avec $N_f = 3 + \theta(Q^2 - \mu_c^2)$ dans les fonctions P_{qg},P_{gq},...,β_0,β_1.

  De plus, $\mu_c = \mathcal{O}(m_c)$; par exemple, nous pouvons prendre $\mu_c = m_c$ ou bien μ_c peut être choisi de manière à décrire correctement les données de EMC [15] et H1 [16] sur la fonction de structure du charme déterminée expérimentalement $F_2^{c,exp}$. Pour cela, on calcule cette fonction de structure en QCD :

  $$F_2^{c,QCD}(x,Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \left(C_2^c(y,Q^2)\, c(x/y,Q^2) + C_2^g(y,Q^2)\, g(x/y,Q^2)\right) \tag{4.57}$$

  ce qui permet ensuite d'ajuster la valeur de différents paramètres (par exemple μ_c) pour obtenir un bon accord avec les données expérimentales sur F_2^c. Nous revenons sur ce point dans la suite. Cette approximation (quark c de masse nulle) est donc légitime si deux conditions sont réunies :

  - si les valeurs de Q^2 intervenant dans l'analyse sont telles que les termes d'ordre $\mathcal{O}(\frac{m_c^2}{Q^2})$ sont négligeables, c'est ce que nous supposons en prenant des distributions initiales à $Q_0^2 = 4$ GeV ^{2} et en évoluant les distributions au-delà de cette valeur.
  - si la condition à la limite $xc(x,Q^2) = 0 \ si \ Q^2 \leq \mu_c^2$ avec $N_f = 3 + \theta(Q^2 - \mu_c^2)$ s'avère convenable pour assurer un bon accord entre $F_2^{c,QCD}$ et $F_2^{c,exp}$.

- La procédure où la masse du quark c est prise en compte est différente : dans cette approche F_2^c est générée à partir du processus de fusion photon-gluon ($\gamma^* g \to c\bar{c}$). Le seuil de production du quark c est alors déterminé exactement, on trouve [14] :

  $$Q^2(\frac{1}{x} - 1) = W^2 \geq 4m_c^2$$

  Au-delà de ce dernier, la contribution du charme à la fonction de structure F_2 est exprimée comme suit :

  $$F_2^c(x,Q^2) = \int_{ax}^1 \frac{dy}{y} C_2^{FPG}(y,Q^2,m_c^2) g(x/y,Q^2) \tag{4.58}$$

avec $a = 1 + \frac{4m_c^2}{Q^2}$. Dans cette formule C_2^{FPG} désigne une fonction coefficient de *Fusion Photon Gluon*, déterminée par le calcul et qui dépend de la masse du quark c.

Dans cette approche, il n'y a donc pas de distribution charmée $xc(x, Q^2)$ proprement dite mais la contribution du quark c est introduite dans la fonction de structure via la densité de gluons en prenant en compte le processus dominant de production de paire $c\bar{c}$ en diffusion inélastique *électron-nucléon.*

A la limite où $Q^2 \gg m_c^2$, on se retrouve dans la limite où la masse du quark c peut être négligée. Dans ce cas, nous nous attendons à ce que les équations (4.58) et (4.57) prennent la même forme, c'est-à-dire que les relations :

$$F_2^{c,m_c=0}(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} C_2^g(y, Q^2) g(x/y, Q^2))$$

$$F_2^{c,m_c \to 0}(x, Q^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} C_2^{FPG}(y, Q^2, m_c^2) g(x/y, Q^2)$$

soient équivalentes. Il n'en est rien car la fonction $C_2^{FPG}(y, Q^2, m_c^2)$ conserve un terme en $\log(\frac{Q^2}{m_c^2})$ dans cette limite qui n'est bien sûr pas présent dans la fonction coefficient $C_2^g(y, Q^2)$, c'est une difficulté qui rend l'application de cette seule procédure pour le traitement du quark c relativement imparfaite [17], [18].

- Une méthode consistante est alors d'assurer un prolongement analytique entre le traitement à bas Q^2 (4.58) et le traitement à grand Q^2 pour lequel le quark c est traité comme un quark de masse nulle dans les équations DGLAP [18]. Dans ce cas, il est possible de s'intéresser au comportement des fonctions de structure au voisinage du seuil du quark c ($Q^2 \sim 2$ GeV ^{2}).

  Dans l'étude que nous proposons pour ce chapitre, nous ne considérons que des valeurs de Q^2 telles que : $Q^2 \geq 4$ GeV ^{2}. Dès lors, notre approximation de ne pas prendre en compte les masses des quarks est légitime moyennant les réserves que nous avons formulées précédemment. Nous déduirons donc F_2, exprimée en fonction des distributions de partons, en appliquant la formule (4.51).

  Le traitement à bas $Q^2 \sim 1$ GeV ^{2} sera discuté dans un prochain chapitre mais nous avons déjà pointé la difficulté principale qui réside dans la définition correcte d'une prescription pour assurer la coincidence des deux limites.

Formes analytiques initiales des distributions de partons

Les formes analytiques initiales des distributions de partons $xf(x, Q_0^2)$ sont généralement exprimées sous la forme :

$$xf(x, Q_0^2) = Ax^B(1-x)^C \mathcal{P}(x\,; D, E, ...) \qquad (4.59)$$

où $\mathcal{P}(x\,; D, E, ...)$ est une fonction de x régulière dépendant des paramètres E,D,... Dans cette expression (4.59), le paramètre B est associé au comportement de type Regge à bas x et le paramètre C est associé aux règles de comptage pour les quarks de valence à grand x, la fonction $\mathcal{P}(x\ ; D, E, ...)$ assure alors une dépendance *suffisamment souple* des distributions partoniques entre ces deux limites.

Pour notre étude, nous prenons pour $\mathcal{P}(x\ ; D, E, ...)$ l'expression fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{P}(x) = 1 + Dx + E\sqrt{x} \tag{4.60}$$

Cette forme est celle proposée par le groupe MRS [12][3]. Nous considérons ainsi les distributions partoniques initiales ci-dessous pour une valeur de Q_0^2 donnée :

$$\begin{aligned}
xu_v(x, Q_0^2) &= A_u x^{B_u}(1-x)^{C_u}(1 + D_u x + E_u\sqrt{x}) \\
xd_v(x, Q_0^2) &= A_d x^{B_d}(1-x)^{C_d}(1 + D_d x + E_d\sqrt{x}) \\
xS(x, Q_0^2) &= A_S x^{B_S}(1-x)^{C_S}(1 + D_S x + E_S\sqrt{x}) \\
xg(x, Q_0^2) &= A_g x^{B_g}(1-x)^{C_g}(1 + D_g x + E_g\sqrt{x}) \qquad (4.62)
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
xu_v &= xu - x\bar{u} \\
xd_v &= xd - x\bar{d} \\
xS &= 2x(\bar{u} + \bar{d} + \bar{s} + \bar{c}) \qquad (4.63)
\end{aligned}$$

Il s'agit ensuite de décrire la structure en saveurs de la mer xS. Nous définissons alors :

$$\begin{aligned}
x\Delta(x, Q_0^2) &= A_\Delta x^{B_\Delta}(1-x)^{C_\Delta}(1 + D_\Delta x) \\
2x\bar{u}(x, Q_0^2) &= 0.4(1-\delta)xS(x, Q_0^2) - x\Delta(x, Q_0^2) \\
2x\bar{d}(x, Q_0^2) &= 0.4(1-\delta)xS(x, Q_0^2) + x\Delta(x, Q_0^2) \\
2x\bar{s}(x, Q_0^2) &= 0.2(1-\delta)xS(x, Q_0^2) \\
2x\bar{c}(x, Q_0^2) &= \delta xS(x, Q_0^2) \qquad (4.64)
\end{aligned}$$

Ces prescriptions correspondent à celles de la paramétrisation MRS(A') où δ est un paramètre petit ($\delta \simeq 0.02$), elles se justifient aisément : en effet, les équations (4.64) traduisent un partage de la distribution de la mer de quarks entre ses différentes composantes avec les propriétés suivantes[4] :

- $x\bar{s} \sim \frac{x\bar{u}}{2} \sim \frac{x\bar{d}}{2}$ brisant la symétrie $(\bar{u}\bar{d}\bar{s})$ de la mer de quarks comme indiqué par les résultats sur la production de di-muons par la collaboration CCFR [19] ;
- $x\Delta = x(\bar{d} - \bar{u}) > 0$ impliquant une brisure de la symétrie $(\bar{u}\bar{d})$ de la mer de quarks comme indiqué par la violation de la règle de somme de Göttfried par la collaboration NMC [20] et les résulats sur l'asymétrie Drell-Yan pp/pn par la collaboration NA51 [21] ;

---

[3] Une autre possibilité intéressante utilisée par le groupe CTEQ est la suivante [13] :

$$\mathcal{P}(x) = 1 + Dx^E \tag{4.61}$$

[4] Nous dressons ici une liste de résultats expérimentaux qui seront repris et expliqués dans un prochain paragraphe, nous définirons alors précisément les observables mesurées par les différentes expériences que nous citons ici.

- $x\bar{c} = \frac{\delta}{2}xS$ (avec $xc = x\bar{c}$) reproduisant correctement les données sur F_2^c des collaborations EMC [15] et H1 [16].

Il est alors possible d'exprimer toutes les distributions xu,$x\bar{u}$,xd,...,$x\bar{c}$ et xg à Q_0^2 en fonction de x et des différents paramètres introduits ci-dessus.

4.1.6 Conclusions

Nous sommes maintenant en mesure de poser le problème que nous nous proposons de résoudre dans la suite :

- Nous définissons, à $Q_0^2 = 4$ GeV ^{2}, les distributions partoniques (4.62) et (4.64) où les paramètres introduits sont des nombres réels. On pose :

$$\begin{aligned} x\Sigma(x, Q_0^2) &= \sum_{q=u,d,s,c} xq(x, Q_0^2) + x\bar{q}(x, Q_0^2) \\ xq_{NS}^{(ud)}(x, Q_0^2) &= xu(x, Q_0^2) + x\bar{u}(x, Q_0^2) - xd(x, Q_0^2) - x\bar{d}(x, Q_0^2) \\ xq_{NS}^{(sc)}(x, Q_0^2) &= xs(x, Q_0^2) + x\bar{s}(x, Q_0^2) - xc(x, Q_0^2) - x\bar{c}(x, Q_0^2) \end{aligned} \tag{4.65}$$

  où $x\Sigma$ est une distribution de type singlet et $xq_{NS}^{(ud)}$,$xq_{NS}^{(sc)}$ sont des distributions de type non-singlet. Les expressions (4.65), ainsi que la distribution de gluons :

$$xg(x, Q_0^2) = A_g x^{B_g}(1-x)^{C_g}(1 + D_g x + E_g\sqrt{x}) \tag{4.66}$$

  sont les quatre densités initiales que nous évoluons par les équations DGLAP dans l'analyse QCD que nous présentons dans la suite. Ce choix est légitime car nous montrons ci-dessous que les différentes observables que nous traitons s'expriment en fonction de ces quatre distributions.

- Nous résolvons alors les équations intégro-différentielles DGLAP avec les conditions initiales (4.65) et (4.66), les paramètres de ces fonctions étant choisis dans un premier temps de façon arbitraire. C'est-à-dire que nous résolvons numériquement le système intégro-différentiel couplé suivant en supposant les conditions initiales (4.65) et (4.66) :

$$\begin{aligned} Q^2\frac{\partial\Sigma(x, Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\int_x^1 \frac{dy}{y}\left[\Sigma(y, Q^2)P_{qq}(\frac{x}{y}) + 2N_f g(y, Q^2)P_{qg}(\frac{x}{y})\right] \\ Q^2\frac{\partial g(x, Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\int_x^1 \frac{dy}{y}\left[\Sigma(y, Q^2)P_{gq}(\frac{x}{y}) + g(y, Q^2)P_{gg}(\frac{x}{y})\right] \\ Q^2\frac{\partial q_{NS}^{ud}(x, Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\int_x^1 \frac{dy}{y} q_{NS}^{ud}(y, Q^2)P_{NS}(\frac{x}{y}) \\ Q^2\frac{\partial q_{NS}^{sc}(x, Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\int_x^1 \frac{dy}{y} q_{NS}^{sc}(y, Q^2)P_{NS}(\frac{x}{y}) \end{aligned} \tag{4.67}$$

  Pour la résolution à l'ordre LL(Q^2) et NLL(Q^2) nous utilisons respectivement nos programmes concernant la méthode des polynomes de Laguerre et la méthode d'Euler dont les descriptions sont données dans le paragraphe précédent.

Pour le traitement de $\alpha_S(Q^2)$ à l'ordre LL(Q^2) et NLL(Q^2) nous utilisons respectivement son expression en fonction de Λ et son équation d'évolution (4.48) avec une valeur initiale $\alpha_S(Q_0^2)$: dans ces deux cas, Λ ou $\alpha_S(Q_0^2)$ nous donne un paramètre supplémentaire à rajouter à l'ensemble des paramètres définis par les distributions initiales (4.65) et (4.66), nous verrons que nous ne prenons pas pour ce dernier une valeur arbitraire.

- A chaque valeur de Q^2 ($Q^2 \geq 4$ GeV ^{2}), il est alors possible de calculer la fonction de structure $F_2(x, Q^2)$ -observable prédite par l'évolution QCD- en fonction des quatre distributions définies par les équations (4.65) et (4.66) :
  - Dans le cas de la diffusion *électron-proton*, nous la notons $F_2^{ep}(x, Q^2)$; dans l'approximation -justifiée précédemment- où l'on néglige la masse des quarks, nous obtenons à l'ordre LL(Q^2) :

$$F_2^{ep}(x, Q^2) = \frac{5}{18} x\Sigma(x, Q^2) + \frac{1}{6} x q_{NS}^{(ud)}(x, Q^2) - \frac{1}{6} x q_{NS}^{(sc)}(x, Q^2) \qquad (4.68)$$

qui prend la forme (4.51) à l'ordre supérieur, nous l'écrivons ci-dessous en fonction de l'expression de F_2^{ep} à l'ordre dominant ($F_2^{ep,(LL(Q^2))}$) et des notations usuelles pour les coefficients de Wilson C_q^2 et C_g^2 :

$$\begin{aligned} F_2^{ep}(x, Q^2) = \quad & \int_x^1 \frac{dy}{y} \left(\delta(1 - x/y) + \frac{\alpha_S}{4\pi} B_2^q(x/y, Q^2)\right) F_2^{ep,(LL(Q^2))}(y, Q^2) \\ + & \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_S}{4\pi} B_2^g(x/y, Q^2) \Big(\sum_{q=u,d,s,c} e_q^2 \Big) g(y, Q^2) \qquad (4.69) \end{aligned}$$

Les expressions ci-dessus sont exactement identiques pour le cas d'une diffusion *muon-proton*.

  - Il est également intéressant d'exprimer la fonction de structure $F_2(x, Q^2)$ dans le cas de la diffusion *électron-neutron* notée $F_2^{en}(x, Q^2)$ et dans le cas de la diffusion *électron-deutéron* notée $F_2^{ed}(x, Q^2)$. On obtient à l'approximation LL(Q^2) :

$$F_2^{en}(x, Q^2) = \frac{5}{18} x\Sigma(x, Q^2) - \frac{1}{6} x q_{NS}^{(ud)}(x, Q^2) - \frac{1}{6} x q_{NS}^{(sc)}(x, Q^2) \qquad (4.70)$$

$$\begin{aligned} F_2^{ed}(x, Q^2) &= \frac{F_2^{ep}(x, Q^2) + F_2^{en}(x, Q^2)}{2} \qquad (4.71) \\ &= \frac{5}{18} x\Sigma(x, Q^2) - \frac{1}{6} x q_{NS}^{(sc)}(x, Q^2) \qquad (4.72) \end{aligned}$$

L'ordre supérieur se calcule de la même manière que précédemment, par exemple :

$$\begin{aligned} F_2^{ed}(x, Q^2) = \quad & \int_x^1 \frac{dy}{y} \left(\delta(1 - x/y) + \frac{\alpha_S}{4\pi} B_2^q(x/y, Q^2)\right) F_2^{ed,(LL(Q^2))}(y, Q^2) \\ + & \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_S}{4\pi} B_2^g(x/y, Q^2) \Big(\sum_{q=u,d,s,c} e_q^2 \Big) g(y, Q^2) \qquad (4.73) \end{aligned}$$

Les expressions ci-dessus restent identiques si la diffusion met en jeu un *muon* au lieu d'un *électron*.

- Il s'agit ensuite de comparer les prédictions calculées numériquement aux mesures expérimentales pour diverses expériences : diffusion *électron-nucléon* ou *muon-nucléon* par exemple. Il est alors nécessaire d'estimer et de quantifier les désaccords théorie-expérience afin d'ajuster les paramètres initiaux des distributions partoniques et de α_S, c'est ce que nous discutons dans le prochain paragraphe.

4.2 Ajustements QCD

4.2.1 χ^2, définitions et propriétés

Définitions

- **Définition générale** : Etant donné un ensemble de variables indépendantes $(x_i)_{(i \subset [1,N])}$ de valeurs moyennes $\bar{x}_i$ et de variances $\Delta x_i{}^2 = \sigma_i^2$, on définit l'estimateur χ^2 sur cet ensemble comme suit :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{\sigma_i^2} \tag{4.74}$$

De plus, nous pouvons calculer la distribution (notée $\mathcal{F}(\chi^2)$) de cet estimateur si l'on suppose que les variables indépendantes $(x_i)_{(i \subset I)}$ suivent des distributions gaussiennes, alors :

$$\mathcal{F}(\chi^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \sigma_1 ... \sigma_N} \int exp(-\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{2\sigma_i^2})\ \delta(\chi^2 - \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{\sigma_i^2})\ dx_1 ... dx_N \tag{4.75}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_i} \\ r^2 &= \sum_{i=1}^{N} \omega_i^2 \end{aligned} \tag{4.76}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\chi^2) &= \mathcal{N} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r^{N-1} \delta(\chi^2 - r^2) dr && (4.77) \\ &= \frac{\mathcal{N}}{2} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \chi^{2(\frac{N-2}{2})} && (4.78) \\ \frac{\mathcal{N}}{2} &= \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})} && (4.79) \end{aligned}$$

Quand le nombre N de variables devient très grand devant 1, nous pouvons simplifier cette expression, elle devient :

$$N \gg 1 \Rightarrow \mathcal{F}(\chi^2) \to \mathcal{G}(\chi^2 - N, \sqrt{2N}) \tag{4.80}$$

La distribution de l'estimateur χ^2 est alors gaussienne de valeur moyenne N et de variance $2N$, où $N \gg 1$ est le nombre de variables indépendantes de l'ensemble considéré.

- **Définition pour un ajustement QCD sans erreur corrélée**: Dans le cas d'un ajustement QCD, il s'agit de comparer les mesures expérimentales: $F_2^{exp}(x,Q^2)$ et les valeurs numériques déduites de la résolution des équations DGLAP: $F_2^{QCD}(x,Q^2)$ (voir ci-dessus), ceci pour chaque valeur de x et Q^2 correspondant à un point expérimental; on note I un tel couple x, Q^2. Supposons qu'il existe N points expérimentaux, c'est à dire N couples x, Q^2 (donc $I \subset [1,N]$); pour chacun, la mesure de F_2 donne $F_2^{exp}(I)$ avec une erreur σ_I[5]. On définit l'estimateur χ^2 comme suit:

  $$\chi^2 = \sum_{I=1}^{N} \frac{(F_2^{QCD}(I) - F_2^{exp}(I))^2}{\sigma_I^2} \tag{4.81}$$

  Etant donné une expérience (J), il peut être intéressant, dans certains cas, d'ajuster globalement la valeur de la normalisation de cette expérience (c_J) en connaissant l'erreur sur cette valeur (σ_J); la définition précédente devient dans le cas où l'on considère n_{exp} différentes -chacune avec N_J mesures expérimentales-:

  $$\chi^2 = \sum_{J=1}^{n_{exp}} \sum_{I=1}^{N_J} \frac{(\frac{F_2^{QCD}(I)}{c_J} - F_2^{exp}(I))^2}{\sigma_I^2} + \sum_{J=1}^{n_{exp}} \frac{(1-c_J)^2}{\sigma_J^2} \tag{4.82}$$

  On note maintenant $F_I = F_2^{QCD}(I)$ et $E_I = F_2^{exp}(I)$, l'équation (4.82) s'écrit ainsi:

  $$\chi^2 = \sum_{J=1}^{n_{exp}} \sum_{I=1}^{N_J} \frac{(\frac{F_I}{c_J} - E_I)^2}{\sigma_I^2} + \sum_{J=1}^{n_{exp}} \frac{(1-c_J)^2}{\sigma_J^2} \tag{4.83}$$

  Dans ces équations, la dépendance dans les paramètres des distributions partoniques initiales et dans la valeur initiale de α_S est implicite.

- **Définition pour un ajustement QCD avec erreurs corrélées**: Soit M la matrice de corrélation des erreurs (si les erreurs ne sont pas corrélées cette matrice est diagonale); on peut écrire de façon générale la relation entre les valeurs vraies V_I et les valeurs mesurées E_I sous la forme:

  $$E_I = V_I + \sum_{\lambda=1}^{n} M_{I,\lambda}\, g_\lambda \tag{4.84}$$

  Dans le cas où les distributions des erreurs suivent des lois gaussiennes, les variables g_λ sont des variables gaussiennes de valeurs moyennes nulles. De plus, si la théorie est correcte, il existe un ensemble de valeurs des paramètres notées $(\mathcal{A}_{0,\alpha})_{\alpha\subset[1,P]}$ telles que:

  $$F_I((\mathcal{A}_{0,\alpha})_{\alpha\subset[1,P]}) = V_I \tag{4.85}$$

  ainsi:

  $$E_I - F_I((\mathcal{A}_{0,\alpha})_{\alpha\subset[1,P]}) = \sum_{\lambda=1}^{n} M_{I,\lambda}\, g_\lambda \tag{4.86}$$

---

[5] La notation F_2 est ici une notation générique, il peut s'agir d'expérience de diffusion *électron-nucléon*, *muon-nucléon* ou bien *neutrino-nucléon* pour ce qui est de la diffusion profondément inélastique, l'estimateur χ^2 peut également être calculé avec d'autres observables pour d'autres types d'expérience comme nous le montrons dans la suite.

mais les valeurs $(\mathcal{A}_{0,\alpha})_{\alpha\subset[1,P]}$ sont inconnues -dans un premier temps-. L'estimateur χ^2 sert alors à quantifier cette méconnaissance : par exemple, la probabilité que la valeur expérimentale E à dE près soit obtenue avec des valeurs des paramètres $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha\subset[1,P]}$ est égale à :

$$\mathcal{L}((\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha\subset[1,P]}, E)dE \propto e^{-\frac{\chi^2}{2}} \tag{4.87}$$

avec :

$$\chi^2((\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha\subset[1,P]}) = \sum_{I_1,I_2=1}^{N} (E_{I_1} - F_{I_2}((A_\alpha)_{\alpha\subset[1,P]}))\mathcal{E}^{-1}_{I_1 I_2}(E_{I_2} - F_{I_2}((A_\alpha)_{\alpha\subset[1,P]})) \tag{4.88}$$

$$\mathcal{E}_{I_1 I_2} = \sum_{\lambda=1}^{n} M_{I_1\lambda}M_{I_2\lambda} \tag{4.89}$$

On simplifie la notation en enlevant la dépendance dans les paramètres qui devient implicite -comme dans les expressions (4.82) et (4.83)-, on introduit de plus la possibilité d'ajuster les valeurs des normalisations de n_{exp} expériences, l'estimateur χ^2 devient :

$$\chi^2 = \sum_{J=1}^{n_{exp}} \sum_{I_1,I_2=1}^{N_J} (E_{I_1} - \frac{F_{I_2}}{c_J})\mathcal{E}^{-1}_{I_1 I_2}(E_{I_2} - \frac{F_{I_2}}{c_J}) + \sum_{J=1}^{n_{exp}} \frac{(1-c_J)^2}{\sigma_J^2} \tag{4.90}$$

Cette équation (4.90) est la définition la plus générale possible concernant l'estimateur χ^2 utilisé pour les ajustements QCD. On retrouve en particulier facilement l'équation (4.83) si la matrice M est diagonale ($\sigma_I = \sqrt{\mathcal{E}_{II}}$). De plus, l'interprétation de cet estimateur ressort directement de la relation (4.87), qui est par ailleurs un corrolaire de cette définition (4.90).

Propriétés

- L'estimateur χ^2 permet de quantifier les désaccords entre les prédictions théoriques F et les valeurs expérimentales E. En effet, la formule (4.90) définit cet estimateur comme une distance entre la variété des données de l'expérience et la variété des prédictions de la théorie, la métrique $g_{\mu\nu}$ associée vérifiant la relation :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \mathcal{E}^{-1}_{\mu\nu} && (4.91) \\ &= (\sum_{\lambda=1}^{n} M_{\mu\lambda}M_{\nu\lambda})^{(-1)} && (4.92) \end{aligned}$$

L'interprétation qui s'ensuit est donc claire : *L'estimateur χ^2 définit une distance entre l'expérience et la théorie -la métrique associée dépendant des matrices de corrélations expérimentales- ; par suite, chercher le meilleur accord possible entre les prédictions de QCD et les mesures revient à chercher une géodésique dans l'espace des paramètres de la théorie, c'est-à-dire à minimiser l'estimateur χ^2 par rapport aux paramètres introduits dans les conditions* *initiales de l'évolution QCD.* Nous avons introduit ces paramètres dans le paragraphe précédent : ils déterminent les conditions initiales de l'évolution QCD. En particulier, moyennant cette interprétation métrique, nous pouvons facilement déduire la propriété (4.87) : la probabilité que la valeur expérimentale E à dE près soit obtenue avec des valeurs des paramètres $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \subset [1,P]}$ vérifie :

$$\mathcal{L}((\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \subset [1,P]}, E)dE = Ce^{-\frac{\chi^2}{2}} \tag{4.93}$$

où C est une constante.

- Nous pouvons de plus vérifier à partir de la définition (4.90) le corrolaire suivant :

$$< (\chi^2)_{min} >= \sum_{J=1}^{n_{exp}} N_J - P \tag{4.94}$$

où P est le nombre de paramètres.

4.2.2 Ajustements QCD

Introduction

Nous sommes maintenant en mesure de comparer quantitativement les prédictions calculées numériquement -par résolution des équations DGLAP- aux mesures expérimentales : cette procédure de comparaison est appelée *ajustement QCD*, elle se traduit algorithmiquement par l'itération des trois étapes suivantes :

- réaliser une évolution QCD -méthode d'Euler ou polynomiale- avec un certain ensemble de paramètres initiaux : on obtient alors les valeurs des prédictions $(F_I)_{I \subset [1, \sum_{J=1}^{nexp} N_J]}$;
- évaluer l'estimateur χ^2 en utilisant la formule (4.90) ;
- modifier les valeurs des paramètres initiaux pour minimiser cet estimateur et recommencer l'évolution QCD.

Pour mener à bien cette procédure, il est important de sélectionner des expériences qui soient adaptées pour contraindre les distributions partoniques que nous considérons, et, réciproquement, il est nécessaire que les formes analytiques initiales de ces dernières soient suffisamment *souples* pour reproduire certaines observations expérimentales et pour réaliser des ajustements stables.

Dans ce cadre, l'étude que nous proposons se concentre essentiellement sur les expériences de diffusion profondément inélastique ; nous allons montrer que ces dernières peuvent être utilisées et combinées pour ajuster au mieux les distributions de quarks et la distribution gluonique au sein d'une analyse globale. La discussion qui suit nous permet de développer, par ailleurs, les arguments que nous avons exposés précédemment concernant les formes fonctionnelles initiales des distributions partoniques que nous avons choisies [9].

Expériences et distributions partoniques

Les expériences de diffusion profondément inélastique mettent en jeu des réactions différentes, ce qui donne accès à différentes fonctions de structure : les expériences H1 [22] et ZEUS [23] avec la réaction $e + p \to e + X$ mesure F_2^{ep}, les expériences BCDMS [24], [25], NMC [26] et E665 [27] avec les réactions $\mu + p \to \mu + X$ et $\mu + d \to \mu + X$ mesurent $F_2^{\mu p}$ et $F_2^{\mu d}$ et l'expérience CCFR [19] avec les réactions $\nu + Fe \to X$ et $\bar{\nu} + Fe \to X$ mesure $F_2^{\nu d}$ et $F_2^{\bar{\nu} d}$.

Un raisonnement à l'ordre dominant montre alors l'utilité de cette diversité de réactions pour contraindre les distributions de quarks ; nous pouvons exprimer les fonctions de structures ci-dessus à l'aide des distributions $x\Sigma$, $xq_{NS}^{(ud)}$ et $xq_{NS}^{(sc)}$ que nous avons introduites précédemment :

$$\begin{aligned} F_2^{\mu p} &= F_2^{ep} = \frac{5}{18} x\Sigma + \frac{1}{6} xq_{NS}^{(ud)} - \frac{1}{6} xq_{NS}^{(sc)} \\ F_2^{\mu d} &= F_2^{ed} = \frac{5}{18} x\Sigma - \frac{1}{6} xq_{NS}^{(sc)} \\ F_2^{\nu d} &= F_2^{\bar{\nu} d} = x\Sigma \end{aligned} \tag{4.95}$$

Il est ensuite possible de déduire les contraintes que ces égalités (4.95) imposent sur les distributions partoniques et de justifier ainsi les relations (4.64).

- Les relations (4.95) impliquent :

$$\frac{5}{18} F_2^{\nu d} - F_2^{\mu d} = \frac{1}{6} xq_{NS}^{(sc)} \tag{4.96}$$

ce qui contraint la distribution $xs + xc$, la contribution de la distribution xc étant négligeable en première approximation. En effet, ette dernière est contrainte par les expériences EMC [15] et H1 [16] qui montrent que :

$$F_2^{c\bar{c}} = \frac{8}{9} xc \sim 0.01 xS \tag{4.97}$$

L'équation (4.96) devient alors :

$$xs \simeq \frac{5}{6} F_2^{\nu d} - 3F_2^{\mu d} \tag{4.98}$$

Les résultats des collaborations CCFR et NMC montrent ensuite que :

$$xs \sim x\frac{\bar{u}}{2} \sim x\frac{\bar{d}}{2} \tag{4.99}$$

qui implique une brisure de la symétrie $\bar{u}\bar{d}\bar{s}$ de la mer de quarks.

- Les relations (4.95) impliquent également que :

$$F_2^{\mu p} - F_2^{\mu n} = \frac{1}{6} xq_{NS}^{(ud)} \tag{4.100}$$

Cette égalité peut être mise à profit pour contraindre la distribution $x(\bar{d} - \bar{u})$, comme le montre la collaboration NMC [20] en mettant en évidence expérimentalement la violation de la règle de somme de Göttfried.

La règle de somme de Göttfried concerne la valeur de l'intégrale :

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{dx}{x}(F_2^{\mu p} - F_2^{\mu n}) \tag{4.101}$$

qui devient pour $a = 0$ et $b = 1$ -en utilisant l'égalité (4.100)- :

$$I(0,1) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 (\bar{d} - \bar{u})dx \tag{4.102}$$

La règle de somme de Goettfried suppose que $\frac{2}{3}\int_0^1(\bar{d} - \bar{u})dx = 0$, elle s'écrit :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}(F_2^{\mu p} - F_2^{\mu n}) = \frac{1}{3} \tag{4.103}$$

La collaboration NMC [20] détermine expérimentalement l'intégrale présente dans cette dernière égalité et observe une violation de cette dernière, plus précisément :

$$\int_{0.004}^{0.4} \frac{dx}{x}(F_2^{\mu p} - F_2^{\mu n}) = 0.236 \pm 0.008 \tag{4.104}$$

ce qui implique :

$$\int_0^1 (\bar{d} - \bar{u})dx > 0 \tag{4.105}$$

On trouve donc que $\bar{d} - \bar{u} > 0$, impliquant une brisure de la symétrie $\bar{u}\bar{d}$ de la mer de quarks.

Cette propriété est également mise en évidence par la collaboration NA51 [21] qui mesure l'asymétrie pp/pn dans des expériences de Drell-Yan :

$$A_{DY} = \frac{\sigma_{pp} - \sigma_{pn}}{\sigma_{pp} + \sigma_{pn}} \tag{4.106}$$

Cette observable est proportionnelle à $x(\bar{u} - \bar{d})$, elle est déterminée expérimentalement : $A_{DY} = -0.09 \pm 0.028 < 0$ montrant ainsi que $\bar{d} - \bar{u} > 0$.

- Cette discussion nous montre donc comment la mer de quarks xS se partage en ses différentes composantes $x\bar{u}$, $x\bar{d}$, $x\bar{s}$ et $x\bar{c}$: les distributions initiales de quarks que nous avons choisies et présentées dans un paragraphe précédent s'accordent avec les résultats que nous venons d'exposer.

- Pour notre analyse, nous évoluons les distributions $x\Sigma$, xg, $xq_{NS}^{(ud)}$ et $xq_{NS}^{(sc)}$ et nous ajustons les paramètres de ces dernières -avec des distributions partoniques qui respectent initialement les contraintes que nous avons présentées ci-dessus-. Les égalités (4.95) montrent alors que les mesures $F_2^{\mu d} - F_2^{\mu p}$ vont contraindre la distribution $xq_{NS}^{(ud)}$ et les mesures de $F_2^{\mu d}$ vont essentiellement contraindre la distribution $x\Sigma$ de même que les mesures F_2^{ep} à bas x (où les distributions de type non-singlet contribuent faiblement).

  Bien évidemment, à l'ordre supérieur (NLL(Q^2)), les équations (4.95) se compliquent quelque peu du fait, en particulier, qu'elles font alors intervenir la distribution gluonique qui doit être ajustée en même temps que les distributions de quarks, la contribution de la distribution de gluons étant essentielle à bas x.

Constante de couplage fort et distribution gluonique

L'ajustement de la distribution de gluons est, par ailleurs, une procédure difficile car la distribution xg intervient toujours en QCD perturbative en facteur de la constante de couplage α_S, donc sous la forme :

$$\alpha_S(Q^2)\ xg(x,Q^2)$$

Par exemple, dans l'expression des fonctions de structure, la distribution de gluons est convoluée à un coefficient de Wilson $C_{2,g}$ qui est proportionnel à α_S. Le problème de l'ajustement de xg est donc fortement couplé à celui de la détermination de Λ_{QCD} (ou $\alpha_S(M_Z^2)$).

Plusieurs approches sont alors possibles pour découpler ce problème :

- Nous pouvons prendre la valeur de $\alpha_S(M_Z^2)$ fournie par d'autres expériences (moins sensibles à la distribution de gluons) : par exemple, la valeur déduite des expériences e^+e^-.

- Nous pouvons déterminer $\alpha_S(M_Z^2)$ par un ajustement QCD à grands x ($x \geq 0.3$) pour lesquels la distribution gluonique est négligeable devant les distributions de type non-singlet ; nous y revenons dans la suite.

- Pour notre analyse, nous réalisons des ajustements QCD en fixant à chaque fois la valeur de $\alpha_S(Q_0^2)$ (et donc de $\alpha_S(M_Z^2)$ qui est déterminé de manière unique par évolution à partir de $\alpha_S(Q_0^2)$) : nous prenons ainsi différentes valeurs de $\alpha_S(Q_0^2)$ comprises dans l'intervalle d'incertitude de cette quantité et nous effectuons des ajustements QCD pour chacune de ces valeurs : la minimisation du χ^2 s'effectue alors uniquement sur les paramètres des densités partoniques.

  Cette approche nous permet également d'étudier les variations de la distribution $xg(x,Q^2)$ en fonction des valeurs de $\alpha_S(M_Z^2)$: nous y revenons dans la suite.

- Dans tous les cas, il peut être intéressant de considérer, au sein de l'analyse globale, des expériences qui sont plus sensibles à la distribution de gluons que ne peuvent l'être les expériences de diffusion profondément inélastique [13] : par exemple, la section efficace de production de jets dans les collisions hadron-hadron [28], [29] est proportionnelle aux termes:
  $\alpha_S^2(Q^2)xg(x,Q^2)x'g(x',Q^2)$ et $\alpha_S^2(Q^2)xg(x,Q^2)x'q(x',Q^2)$,
  pour les processus de collisions gluon-gluon et gluon-quark respectivement. Ces données sont ainsi bien adaptées pour contraindre la distribution xg. La production de photons directs [30] ($g+q \to \gamma+q$, $q+\bar{q} \to \gamma+g$) est également un processus intéressant pour contraindre xg en particulier à grands x.

  Nous n'incluons pas de telles données dans l'analyse que nous proposons mais il s'agit d'une piste de développement très intéressante. Nous illustrons sur la fig. 4.6 la couverture du plan cinématique des différentes expériences que nous avons évoquées.

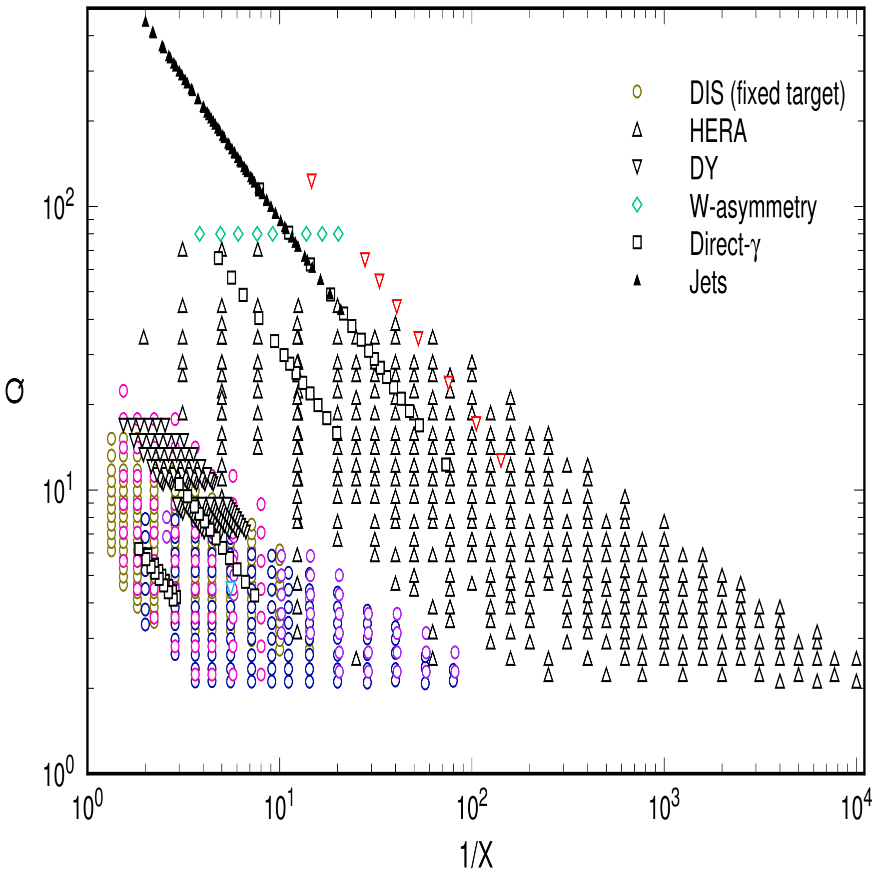


FIG. 4.6 – *Plan cinématique* $x, \sqrt{Q^2}$ *couvert par les expériences indiquées sur cette figure : y sont représentées les expériences de diffusion profondément inélastique (DIS,HERA-H1 et ZEUS-), les expériences Drell-Yan (DY) qui mesurent l'asymétrie* $A_{DY} = \frac{\sigma_{pp}-\sigma_{pn}}{\sigma_{pp}+\sigma_{pn}}$ *et les expériences* $p\bar{p}$ *avec la mesure de l'assymétrie W* ($W^{\pm} \rightarrow l^{\pm}\nu$, $A_W = \frac{\sigma(l^+)-\sigma(l^-)}{\sigma(l^+)+\sigma(l^-)}$)*, la production de photons directs ou la production de jets.*

4.3 Analyse et Résultats

4.3.1 Hypothèses

Distributions initiales

Nous rappelons ci-dessous les hypothèses que nous avons faites sur les formes analytiques des distributions de partons à $Q_0^2 = 4$ GeV ^{2}, ces formules (hypothèses) ont été discutées et justifiées dans les paragraphes précédents. Nous en donnons ci-dessous la liste afin d'agréger l'essentiel des résultats que nous avons déjà obtenus :

$$\begin{aligned} xu_v(x,Q_0^2) &= A_u x^{B_u}(1-x)^{C_u}(1+D_u x+E_u\sqrt{x}) \\ xd_v(x,Q_0^2) &= A_d x^{B_d}(1-x)^{C_d}(1+D_d x+E_d\sqrt{x}) \\ xS(x,Q_0^2) &= A_S x^{B_S}(1-x)^{C_S}(1+D_S x+E_S\sqrt{x}) \\ xg(x,Q_0^2) &= A_g x^{B_g}(1-x)^{C_g}(1+D_g x+E_g\sqrt{x}) \end{aligned} \qquad (4.107)$$

avec :

$$\begin{aligned} xu_v &= xu - x\bar{u} \\ xd_v &= xd - x\bar{d} \\ xS &= 2x(\bar{u}+\bar{d}+\bar{s}+\bar{c}) \end{aligned} \qquad (4.108)$$

De plus, les composantes de la mer de quarks sont paramétrisées comme suit :

$$\begin{aligned} x\Delta(x,Q_0^2) &= A_\Delta x^{B_\Delta}(1-x)^{C_\Delta}(1+D_\Delta x) \\ 2x\bar{u}(x,Q_0^2) &= 0.4(1-\delta)xS(x,Q_0^2) - x\Delta(x,Q_0^2) \\ 2x\bar{d}(x,Q_0^2) &= 0.4(1-\delta)xS(x,Q_0^2) + x\Delta(x,Q_0^2) \\ 2x\bar{s}(x,Q_0^2) &= 0.2(1-\delta)xS(x,Q_0^2) \\ 2x\bar{c}(x,Q_0^2) &= \delta xS(x,Q_0^2) \end{aligned} \qquad (4.109)$$

A partir de ces formules, nous avons défini les quatre distributions initiales ($Q_0^2 = 4$ GeV ^{2}) dont nous considérons l'évolution QCD par la méthode d'Euler (à l'approximation NLL(Q^2)) ou la méthode polynomiale (à l'approximation LL(Q^2)) :

$$\begin{aligned} x\Sigma(x,Q_0^2) &= \sum_{q=u,d,s,c} xq(x,Q_0^2) + x\bar{q}(x,Q_0^2) \\ xg(x,Q_0^2) &= A_g x^{B_g}(1-x)^{C_g}(1+D_g x+E_g\sqrt{x}) \\ xq_{NS}^{(ud)}(x,Q_0^2) &= xu(x,Q_0^2) + x\bar{u}(x,Q_0^2) - xd(x,Q_0^2) - x\bar{d}(x,Q_0^2) \\ xq_{NS}^{(sc)}(x,Q_0^2) &= xs(x,Q_0^2) + x\bar{s}(x,Q_0^2) - xc(x,Q_0^2) - x\bar{c}(x,Q_0^2) \end{aligned} \qquad (4.110)$$

Les observables sont ensuite exprimées en fonction de ces quatre distributions ; à l'ordre dominant, nous avons montré :

$$\begin{aligned} F_2^{ep}(x,Q^2) &= F_2^{\mu p}(x,Q^2) = \frac{5}{18}x\Sigma(x,Q^2) + \frac{1}{6}xq_{NS}^{(ud)}(x,Q^2) - \frac{1}{6}xq_{NS}^{(sc)}(x,Q^2) \\ F_2^{ed}(x,Q^2) &= F_2^{\mu d}(x,Q^2) = \frac{5}{18}x\Sigma(x,Q^2) - \frac{1}{6}xq_{NS}^{(sc)}(x,Q^2) \end{aligned} \qquad (4.111)$$

Nous avons également montré que l'ordre supérieur (NLL(Q^2)) se déduit aisément des expressions à l'ordre LL(Q^2) :

$$\begin{aligned} F_2^{e(\mu)N,(NLL)}(x,Q^2) = \quad & \int_x^1 \frac{dy}{y}\,(\delta(1-x/y) + \frac{\alpha_S}{4\pi}B_2^q(x/y,Q^2))\,F_2^{e(\mu)N,(LL)}(y,Q^2) \\ + \quad & \int_x^1 \frac{dy}{y}\,\frac{\alpha_S}{4\pi}B_2^g(x/y,Q^2)\,(\sum_{q=u,d,s,c} e_q^2)g(y,Q^2) \end{aligned} \tag{4.112}$$

Expériences

Nous utilisons pour notre analyse les expériences de diffusion inélastique profonde : l'expérience H1 [22] qui étudie la réaction $e + p \to e + X$ et mesure F_2^{ep} ainsi que les expériences BCDMS [24], [25], NMC [26] et E665 [27] qui étudient les réactions $\mu + p \to \mu + X$ et $\mu + d \to \mu + X$ et mesurent $F_2^{\mu p}$ et $F_2^{\mu d}$. Comme nous l'avons expliqué plus haut, la combinaison des ces différentes mesures permet de contraindre spécifiquement la distribution singlet ou les distributions non-singlet.

Ajustements

Nous avons défini l'estimateur χ^2 en fonction de la matrice de corrélation des erreurs expérimentales M_{ij} :

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{J=1}^{n_{exp}} \sum_{I_1,I_2=1}^{N_J} (E_{I_1} - \frac{F_{I_2}}{c_J})\mathcal{E}^{-1}_{I_1 I_2}(E_{I_2} - \frac{F_{I_2}}{c_J}) + \sum_{J=1}^{n_{exp}} \frac{(1-c_J)^2}{\sigma_J^2} \\ \mathcal{E}_{I_1 I_2} &= \sum_{\lambda=1}^{n} M_{I_1\lambda} M_{I_2\lambda} \end{aligned} \tag{4.113}$$

où les termes E_I désignent les valeurs expérimentales de F_2 et les termes F_I désignent les prédictions de F_2 calculées par évolution QCD. De l'expression (4.113), on peut déduire :

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{J=1}^{n_{exp}} \sum_{I=1}^{N_J} \frac{(E_I - \frac{F_I(1-\sum_{k=1}^{n_{syst}} \delta_k(s_k))}{c_J})^2}{\sigma_{stat}^2} + \sum_{J=1}^{n_{exp}} \frac{(1-c_J)^2}{\sigma_J^2} + \sum_{k=1}^{n_{syst}} s_k^2 \\ \delta_k(s_k) &= s_k \frac{F_k^+ - F_k^-}{2F_k} + s_k^2 \frac{F_k^+ + F_k^-}{2F_k} \end{aligned} \tag{4.114}$$

Nous minimisons alors l'estimateur χ^2 évalué par l'équation (4.114) par rapport aux paramètres A_α,B_α,C_α, D_α et E_α en fixant pour chaque ajustement la valeur de $\alpha_S(Q_0^2)$ (ou de Λ_{QCD}). Cette procédure est réalisée en posant $s_k = 0$, les erreurs systématiques sont ensuite considérées pour calculer les bandes d'erreur systématique des distributions déduites de l'ajustement. Par exemple, si l'on note $\mathbf{p}$ un vecteur regroupant l'ensemble des paramètres :

$$\Delta^{\pm} xg(x,Q^2,\mathbf{p}) = xg(x,Q^2,\mathbf{p}) \pm xg(x,Q^2,\mathbf{p} + \mathbf{\Delta p}) \tag{4.115}$$

$\mathbf{\Delta p}$ s'exprimant en fonction de la matrice de corrélation :

$$M_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi^2}{\partial p_i \partial s_j}$$

et de la matrice :

$$N_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi^2}{\partial p_i \partial p_j}$$

$$\mathbf{\Delta p} = \frac{(N^{-1} + N^{-1}MM^tN^{-1})\partial_{\mathbf{p}}xg}{\sqrt{\partial_{\mathbf{p}}xg(N^{-1} + N^{-1}MM^tN^{-1})\partial_{\mathbf{p}}xg}} \tag{4.116}$$

Remarques

- *Corrections de Higher Twists (HT)* :
  A bas Q^2, des effets dits de *Higher Twists (HT)* -termes en puissance de $1/Q^2$- sont à prendre en compte dans l'expression de $F_2(x, Q^2)$.
  Dans un premier temps, nous discutons la contribution de ces termes à un niveau phénoménologique ; ensuite, nous explicitons le traitement que nous adoptons pour notre analyse.

  L'expression de $F_2(x, Q^2)$ peut s'écrire de façon générale :

$$F_2(x, Q^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(x, Q^2)}{(Q^2)^n} \tag{4.117}$$

  Dans les développements précédents, nous n'avons retenu que le terme dominant de cette équation ($n = 0$), mais à bas Q^2, il semble clair sur cette égalité que les termes d'ordre supérieur ($n \geq 1$) sont à considérer. L'expression de F_2 prend alors la forme suivante :

$$F_2(x, Q^2) = F_2^{QCD}(x, Q^2)\left(1 + \frac{C_1(x, Q^2)/C_0(x, Q^2)}{Q^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{Q^4})\right) \tag{4.118}$$

  où $F_2^{QCD}(x, Q^2)$ représente l'expression de F_2 en QCD perturbative que nous avons traitée jusqu'à présent.
  Empiriquement, on montre que le terme correctif $\frac{C_1(x,Q^2)/C_0(x,Q^2)}{Q^2}$ peut s'écrire comme suit :

$$\frac{C_1(x, Q^2)/C_0(x, Q^2)}{Q^2} = \frac{f(x)}{Q^2} \tag{4.119}$$

$$f(x) = \frac{0.3 \text{ GeV }^2}{1 - x} \quad (\textit{grands } x) \tag{4.120}$$

$$f(x) = 0 \quad (\textit{bas } x) \tag{4.121}$$

  Cependant, pour demeurer à un niveau où la QCD perturbative est bien établie théoriquement, nous nous sommes restreints -pour l'analyse que nous proposons- à un domaine cinématique où les effets de HT restent négligeables (c'est-à-dire $\frac{f(x)}{Q^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{Q^4}) \ll 1$) :

$$Q^2 \geq 4 \text{ GeV }^2 \tag{4.122}$$

$$W^2 \geq 10 \text{ GeV }^2 \tag{4.123}$$

  avec $W^2 = Q^2(1 - x)/x$.

- *Corrélation à bas x entre la croissance de la densité de gluons (B_g) et la croissance de la densité des quarks de la mer (B_S) pour $Q_0^2 = 4$ GeV ^{2} :*
  La génération des quarks de la mer par la réaction $g \to q + \bar{q}$ tend à prouver -par un raisonnement à l'ordre dominant- que B_S doit être égal à B_g ; il n'est pas certain cependant que cette propriété soit inchangée à l'ordre supérieur.
  De même, si l'on suppose que les distributions à bas $Q^2 \leq Q_0^2$ sont d'origine non perturbative, la prépondérance des amplitudes de diffusion des réactions quark-quark et gluon-quark par l'échange d'un poméron suggère que $B_S \sim B_g$. Toutefois, cette relation peut être vérifiée pour des valeurs de Q^2 inférieures à 4 GeV ^{2}, sans pour autant rester valide à Q_0^2.
  En conséquence, aucun argument n'impose de vérifier la condition $B_S = B_g$ à Q_0^2, nous n'imposons donc pas cette condition par la suite.
  Notons également que les déterminations expérimentales de F_2 (dont le comportement à bas x est une indication de la variation de la distribution des quarks de la mer) et de la pente $dF_2/d\log Q^2$ (sensible à la variation de la distribution de gluons) pour $Q^2 \simeq 5$ GeV ^{2} tendent à prouver que la croissance de la densité des quarks de la mer est plus faible que celle de la densité de gluons : soit $B_S < B_g$ (voir fig. 4.7).

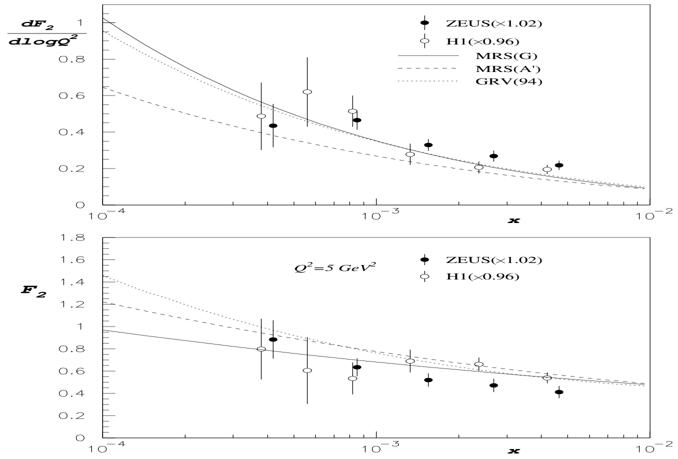


FIG. 4.7 – *Variations de F_2 (sensible à la densité des quarks de la mer) et de la pente $dF_2/d\log Q^2$ (sensible à la densité de gluons) en fonction de x à $Q^2 \simeq 5$ GeV ^{2}.*

- *Règles de comptage et règle de somme* :
  En QCD perturbative, les densités de quarks et de gluons satisfont des contraintes globales, que l'on peut diviser en deux groupes d'équations :

  - Les règles de comptage ;
    en diffusion ep elles s'écrivent :

$$\int_0^1 u_v(x, Q^2)dx \quad = \quad 2 \qquad (4.124)$$

$$\int_0^1 d_v(x,Q^2)dx \quad = \quad 1 \tag{4.125}$$

- La règle de somme ;
  l'impulsion totale du système de quarks-gluons doit vérifier :

$$\int_0^1 (x\Sigma(x,Q^2) + xg(x,Q^2))dx = 1 \tag{4.126}$$

Les relations ci-dessus peuvent être imposées aux densités après évolution QCD. Elles permettent de la sorte de déterminer certains paramètres des distributions initiales en réduisant le nombre de paramètres libres de l'ajustement. Nous procédons ici de façon différente ; nous n'imposons pas de contraintes globales aux distributions que nous considérons, mais, une fois l'ajustement réalisé, nous évaluons les intégrales ci-dessus. Par exemple, nous calculons l'impulsion totale du système pour différentes valeurs de Q^2 :

$$I(Q^2) = \int_0^1 (x\Sigma(x,Q^2) + xg(x,Q^2))dx \tag{4.127}$$

Nous pouvons ensuite tester la validité de la règle de somme (4.126) et ceci représente également un test de la QCD perturbative.

4.3.2 Résultats

Ajustements NLL(Q^2)

Nous exposons dans cette partie les résultats que nous avons obtenus quant à la vérification de la QCD perturbative par la réalisation d'ajustements QCD NLL(Q^2) -l'évolution étant effectuée par une méthode d'Euler définie précédemment-.

♠ Dans un premier temps, nous fixons la valeur de $\alpha_S(Q_0^2)$ telle que $\alpha_S(M_Z^2) = 0.116$ (soit $\Lambda_{QCD}^{(4)} = 0.290$) [13], puis on effectue l'ajustement QCD en minimisant sur l'ensemble des paramètres introduits plus haut (voir le paragraphe précédent). Les résultats obtenus sont présentés dans les tables (4.2) et (4.3). La table (4.2) regroupe les valeurs de paramètres initiaux ajustés et la table (4.3) indique les valeurs de l'estimateur χ^2 pour les différentes expériences considérées. On trouve les valeurs de l'estimateur χ^2 évaluées avec les erreurs statistiques seules (χ^2 (err. stat.)) et ses valeurs lorsque les erreurs statistiques et systématiques sont additionnées en quadrature (χ^2 (err. stat. $\oplus$ syst.)). Notons également que les valeurs de χ^2 indiquées prennent en compte le terme de normalisation $(\frac{1-\mathcal{N}_{exp}}{\sigma_{exp}})^2$ ($\sigma_{exp} = 2\%$ pour NMC et BCDMS, 1.5% pour H1 et 2.8% pour E665).

La fig. 4.8 illustre ensuite la comparaison de l'ajustement réalisé et des mesures expérimentales pour la fonction de structure $F_2^{(e(\mu),p)}$, on note le très bon accord obtenu.

A_g	B_g	C_g	D_g	E_g
1.84	-0.18	5.13	4.07	-1.90

A_S	B_S	C_S	D_S	E_S
0.95	-0.14	9.63	11.2	-2.55

A_u	B_u	C_u	D_u	E_u
2.26	0.56	3.96	4.65	-0.54

A_d	B_d	C_d	D_d	E_d
0.279	0.33	4.46	1.93	6.80

A_Δ	B_Δ	C_Δ	D_Δ	δ
0.04	0.3	9.63	49.5	0.02

TAB. 4.2 – *Valeurs des paramètres initiaux ($Q_0^2 = 4$ GeV ^{2}) déduits de l'ajustement QCD.*

Expériences	Nb points (N)	χ^2 (err. stat.)	χ^2 (err. stat. $\oplus$ syst.)	Normalisation ($\mathcal{N}$)
H1 (ep)	164	212.8	109.3	0.99
NMC (μp)	93	119.2	87.4	0.98
BCDMS (μp)	171	239.1	167.1	0.97
E665 (μp)	35	37.5	33.1	1.04
Exp. (ep,μp)	463	608.6	396.9	
NMC (μd)	93	118.5	89.1	0.98
BCDMS (μd)	253	282.6	244.7	0.97
E665 (μd)	35	33.2	29.3	1.04
Exp. (μd)	381	434.3	363.1	
Exp. (ep,μp,μd)	844	1042.9	760.0	

TAB. 4.3 – *Valeurs de l'estimateur χ^2 obtenues pour les différentes expériences étudiées dans cette analyse, nous indiquons également les nombres de mesures expérimentales inclus dans l'ajustement pour ces expériences (N) ainsi que les normalisations trouvées pour chacune d'entre elles.*

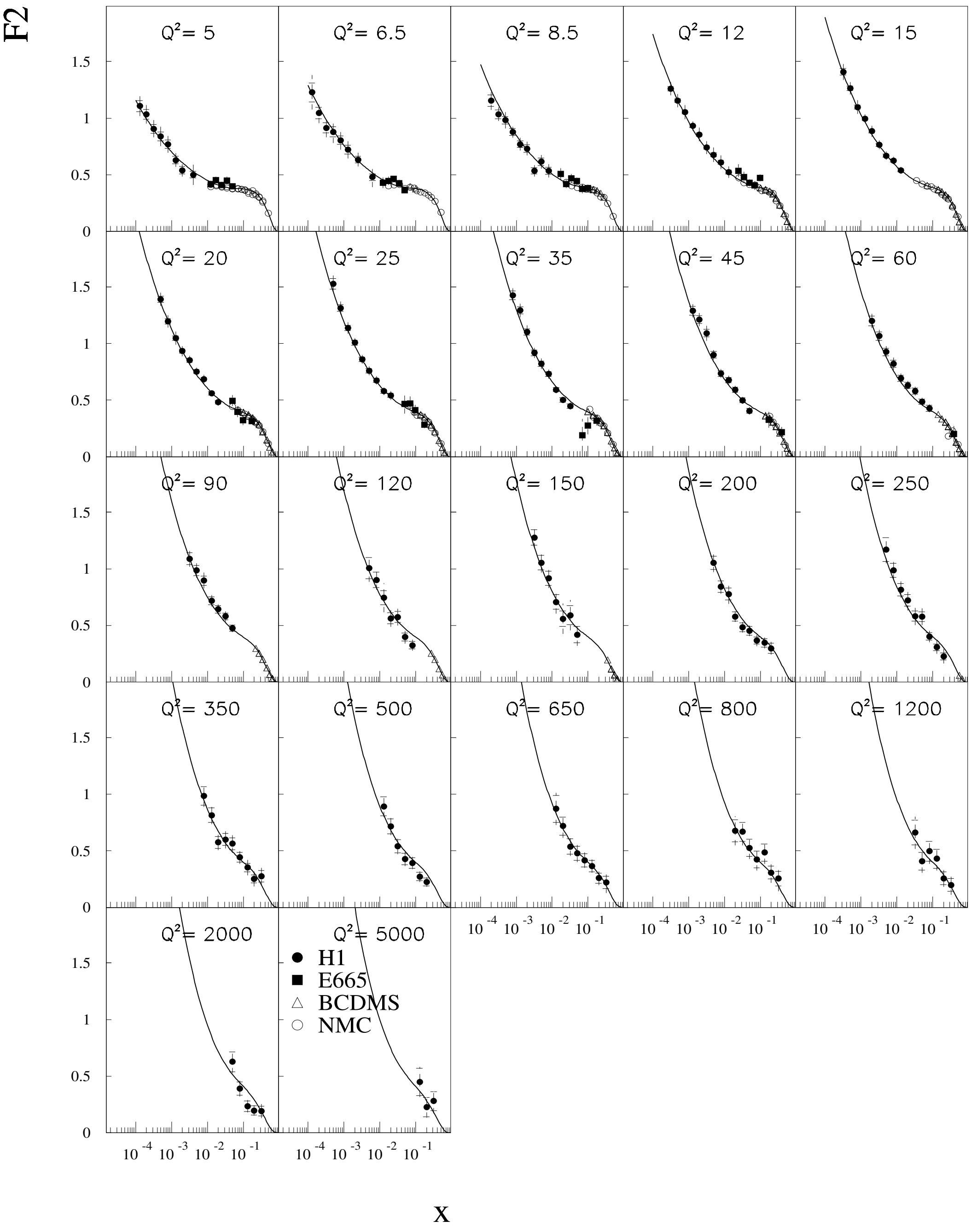


FIG. 4.8 – *Mesures de* $F_2^{(e(\mu),p)}(x,Q^2)$ *et ajustement QCD NLL(*Q^2*) pour différentes valeurs de* Q^2(GeV ^{2}) *(voir texte).*

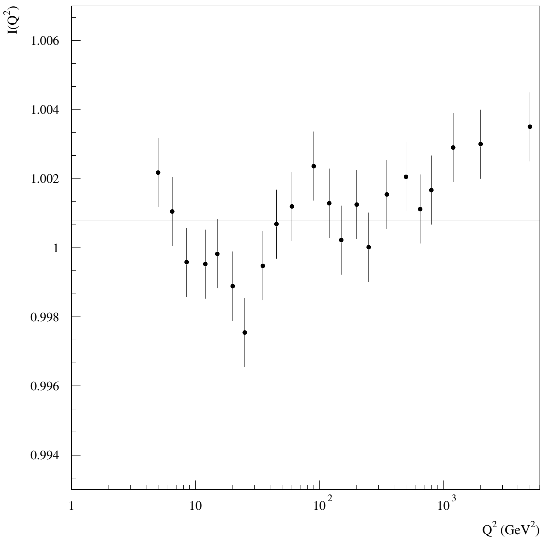


FIG. 4.9 – *Valeurs de l'intégrale* $I(Q^2) = \int_0^1 (x\Sigma(x,Q^2) + xg(x,Q^2))dx$ *calculées après la réalisation de l'ajustement QCD. Nous obtenons :* $I \simeq 1$ *avec une erreur de dispersion négligeable (*$\sim 0.1\%$*), l'incertitude sur la normalisation des expériences (*$\sim 2\%$*) n'est pas représentée sur cette figure.*

Sur la fig. 4.9 nous montrons la vérification de la règle de somme que nous déduisons de l'ajustement ; nous calculons l'intégrale $I(Q^2) = \int_0^1 (x\Sigma(x,Q^2) + xg(x,Q^2))dx$ pour différentes valeurs de Q^2 et nous obtenons :

$$I = 1.00 \pm 0.02$$

où l'incertitude sur I indiquée dans cette dernière égalité représente l'incertitude de normalisation ($\sim 2\%$).

La règle de somme sur l'impulsion est ainsi vérifiée avec une très bonne précision, et, comme nous l'avons souligné plus haut, il s'agit d'un test important de la QCD perturbative.

♠ Dans un deuxième temps, nous déduisons la distribution de gluons $xg(x,Q^2)$ et son erreur systématique associée ($\Delta xg(x,Q^2)$).

$$\begin{aligned}
\Delta xg(x,Q^2) &= \frac{|\Delta^+ xg(x,Q^2,\mathbf{p})| + |\Delta^- xg(x,Q^2,\mathbf{p})|}{2} \qquad (4.128)\\
\Delta^\pm xg(x,Q^2,\mathbf{p}) &= xg(x,Q^2,\mathbf{p}) \pm xg(x,Q^2,\mathbf{p}+\mathbf{\Delta p})\\
\mathbf{\Delta p} &= \frac{(N^{-1} + N^{-1}MM^tN^{-1})\partial_{\mathbf{p}} xg}{\sqrt{\partial_{\mathbf{p}} xg(N^{-1} + N^{-1}MM^tN^{-1})\partial_{\mathbf{p}} xg}}\\
M_{ij} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi^2}{\partial p_i \partial s_j}\\
N_{ij} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi^2}{\partial p_i \partial p_j}
\end{aligned}$$

On peut montrer que l'erreur systématique estimée comme ci-dessus est dominée par l'erreur sur la valeur de $\alpha_S(M_Z^2)$ [13], nous considérons :

$$\alpha_S(M_Z^2) = 0.116 \pm 0.005 \tag{4.129}$$

Pour les deux valeurs extrêmes, $\alpha_S(M_Z^2) = 0.111$ et $\alpha_S(M_Z^2) = 0.121$, nous réalisons deux ajustements QCD, nous déduisons ensuite les distributions gluoniques correspondantes, puis $\Delta xg(x,Q^2)$.

La fig. 4.10 regroupe les densités de gluons calculées pour la valeur centrale de $\alpha_S(M_Z^2)$ (courbes en trait plein) et pour les deux valeurs extrêmes (courbes en trait discontinu et pointillé) ; L'intervalle entre ces deux dernières courbes représente l'incertitude systématique principale pour la distribution de gluons.

Ajustement LL(Q^2)

Nous avons également réalisé un ajustement LL(Q^2) qui repose sur la méthode polynomiale de résolution des équations DGLAP ; nous présentons sur la fig. 4.11 le résultat de cet ajustement, ce dernier n'étant pas utilisé pour dériver des prédictions quantitatives sur la QCD perturbative.

4.4 Mesure de $\alpha_S(M_Z^2)$

Nous donnons dans ce paragraphe les principes de la détermination de $\alpha_S(M_Z^2)$ par la procédure d'ajustements QCD. Dans ce cadre, nous étudions les résultats qui peuvent être obtenus et nous énonçons les perspectives qui nous paraissent justes pour progresser dans cette voie à l'avenir. De nombreuses autres méthodes d'extraction de $\alpha_S(M_Z^2)$ sont également possibles, en particulier à partir des règles de somme de la QCD perturbative, nous ne les abordons pas dans cette présentation [31].

Nous avons déjà discuté plus haut la forte corrélation qui existe entre la distribution gluonique et la constante de couplage fort ($\alpha_S(M_Z^2)$ ou Λ_{QCD}) au sein de la procédure d'ajustements QCD ; cependant, comme nous l'avons souligné, il est possible de réduire l'influence de la distribution de gluons en se plaçant dans une région cinématique où celle-ci est négligeable devant les distributions de type non-singlet, il s'agit de la région des grands x, qui comprend essentiellement les données des expériences sur cible fixe [24], [26], [32].

On rappelle que l'évolution de la fonction de structure F_2 par les équations DGLAP s'écrit de façon générale :

$$\begin{aligned} Q^2 \frac{\partial F_2(x,Q^2)}{\partial Q^2} &= \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \left[\int_x^1 \frac{dz}{z} \left(\frac{x}{z}\right) P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right) F_2(z,Q^2) \right. \\ &\quad \left. + 2\sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} \left(\frac{x}{z}\right) P_{qg}\left(\frac{x}{z}\right) zg(z,Q^2) \right] \end{aligned} \tag{4.130}$$

Dans le domaine cinématique des grands x, cette équation se simplifie et devient :

$$Q^2 \frac{\partial F_2(x,Q^2)}{\partial Q^2} = \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \left[\int_x^1 \frac{dz}{z} \left(\frac{x}{z}\right) P_{qq}\left(\frac{x}{z}\right) F_2(z,Q^2) \right] \tag{4.131}$$

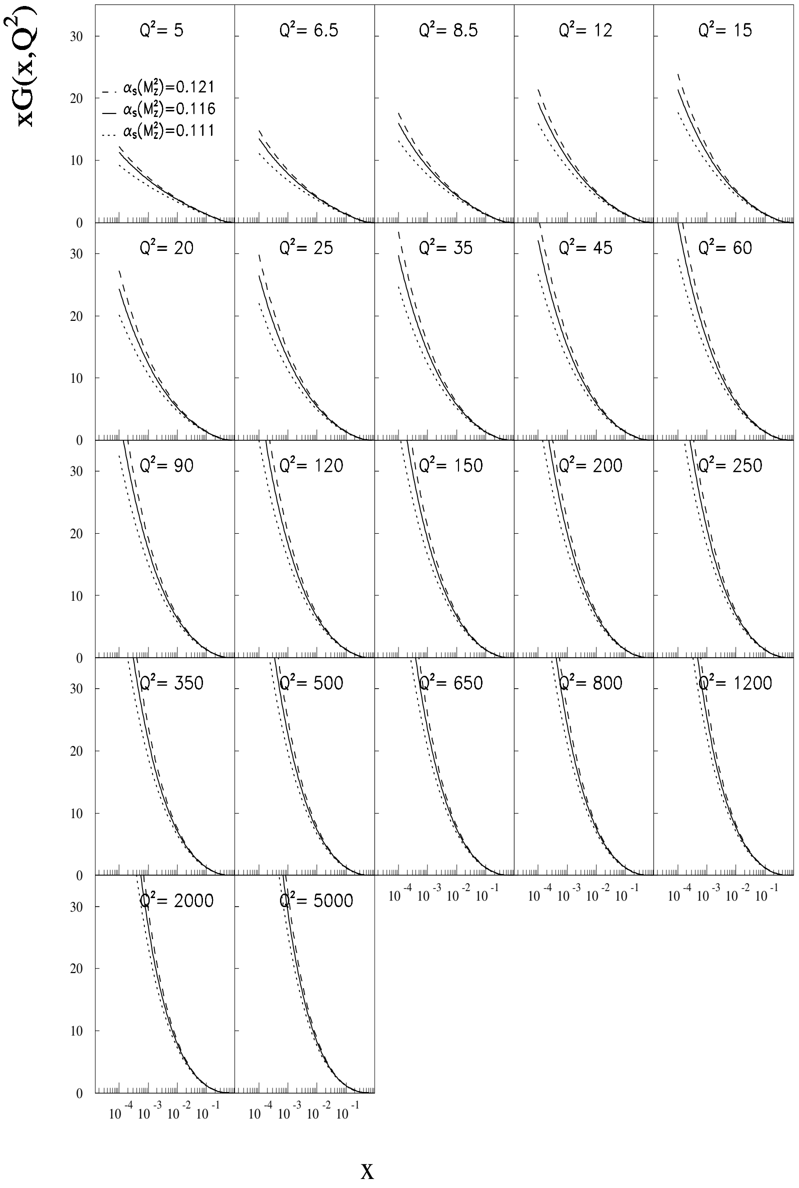


FIG. 4.10 – *Densités de gluons* $(xg(x,Q^2))$ *déduites de l'ajustement QCD NLL*(Q^2) *pour* $\alpha_S(M_Z^2) = 0.116$ *(trait plein),* $\alpha_S(M_Z^2) = 0.111$ *(trait pointillé) et* $\alpha_S(M_Z^2) = 0.121$ *(trait discontinu) ; l'intervalle entre ces deux dernières courbes représente l'incertitude systématique principale pour la distribution de gluons (voir texte).*

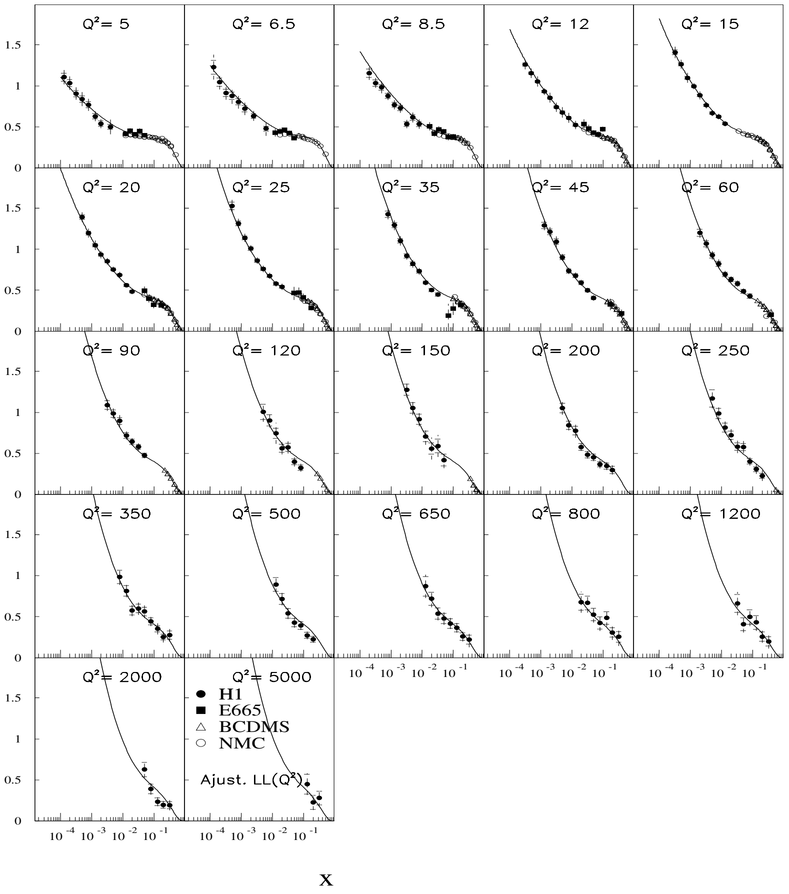


FIG. 4.11 – *Mesures de* $F_2^{(e(\mu),p)}(x, Q^2)$ *et ajustement QCD LL(*Q^2*) pour différentes valeurs de* Q^2(GeV ^{2}) *(voir texte).*

Cette dernière égalité peut encore être simplifiée par propriété de la fonction $\frac{1}{z}P_{qq}(\frac{x}{z})$, qui est très rapidement décroissante pour $z \geq x$; l'intégrale précédente est ainsi dominée par la contribution de l'intégrand pour $z \simeq x$, on obtient alors :

$$Q^2 \frac{\partial F_2(x, Q^2)}{\partial Q^2} \simeq \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \mathcal{F}(x) F_2(x, Q^2) \tag{4.132}$$

où $\mathcal{F}(x)$ est une fonction de x non-singulière calculable en QCD perturbative.

Ainsi :

$$Q^2 \frac{\partial \log F_2(x, Q^2)}{\partial Q^2} \simeq \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi} \mathcal{F}(x) \tag{4.133}$$

De l'équation (4.133), nous pouvons déduire qu'il est possible d'extraire $\alpha_S(M_Z^2)$ (ou Λ_{QCD}) des pentes logarithmiques ($Q^2 \frac{\partial \log F_2(x,Q^2)}{\partial Q^2}$) par une procédure d'ajustements QCD [33], moyennant la prise en compte correcte des effets de Higher Twists que nous avons présentés plus haut. Il a ainsi été montré que $\alpha_S(M_Z^2) = 0.113 \pm 0.005$ [33]. De plus, cette étude est intéressante car elle permet de trouver une relation entre le nombre minimum de paramètres libres que nous devons considérer dans l'ajustement et la sensibilité de cet ajustement à la valeur de $\alpha_S(M_Z^2)$ [34] ; nous explicitons cette proposition dans l'appendice II à ce chapitre.

Toutefois, une telle détermination de $\alpha_S(M_Z^2)$ dépend également de manière importante de la méthode d'ajustements et, en particulier, des formes analytiques initiales supposées pour les distributions partoniques [35]. Nous présentons sur la fig. 4.12 deux ajustements QCD, qui sont effectués pour deux valeurs de $\alpha_S(M_Z^2)$ (noté a sur cette figure), $a = 0.113$ correspondant à la valeur déduite dans la référence [33] et $a = 0.120$ correspondant à la valeur déduite des mesures directes à partir des taux de jets [36], la valeur moyenne mondiale étant $\alpha_S(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.004$ [31]. Les formes analytiques des distributions initiales considérées dans cette analyse sont celles que nous avons présentées plus haut.

On superpose sur cette fig. 4.12 les données de SLAC [32] et BCDMS [24] pour les quatre valeurs de x présentées (avec la condition $W^2 \geq 10$ GeV ^{2}). On note que la valeur de $\alpha_S(M_Z^2)$ est bien contrainte par BCDMS pour $x = 0.35$ et $x = 0.45$ ($\alpha_S(M_Z^2) = 0.113$), alors que les données de SLAC privilégient une valeur supérieure. Cependant, leurs incertitudes sont plus importantes et leur contribution statistique est donc plus faible.

C'est une analyse de ce type, en incluant des effets de HT, qui a permis de déduire la valeur $\alpha_S(M_Z^2) = 0.113 \pm 0.005$ [33].

Comme nous l'avons indiqué plus haut, il peut être intéressant d'effectuer cette détermination au sein d'une analyse globale utilisant différentes expériences. Ce dernier point est explicite sur la fig. 4.13 où les données de CDF [28] et D0 [29] sont comparées aux prédictions théoriques évaluées en supposant $a = 0.113$ et $a = 0.120$. La tendance indiquée sur cette dernière fig. 4.13 est même en faveur de $a = 0.120$.

La détermination précise de $a = \alpha_S(M_Z^2)$ à partir de la réalisation d'ajustements QCD est un enjeu majeur, les arguments que nous avons développés rapidement ci-dessus montrent que cette détermination s'inscrit naturellement dans une perspective globale où un large ensemble de données de diffusion inélastique profonde et autres (collisions hadron-hadron par exemple) est utilisé.

4.5 Conclusions

Nous avons développé un nouveau programme de résolution des équations DGLAP à l'ordre NLL(Q^2) ; nous avons ensuite utilisé ce dernier pour réaliser des ajustements QCD. Dans ce chapitre, nous avons étudié chaque étape de la procédure d'ajustements, par exemple : les formes analytiques des distributions partoniques initiales, le traitement des saveurs lourdes, les expériences pertinentes pour permettre une détermination précise de la densité de gluons, la procédure de minimisation et le calcul de l'erreur sur les paramètres.

Nous avons alors présenté un ajustement QCD incluant les expériences H1, NMC, BCDMS et E665 et déduit la densité de gluons. D'autre part, cet ajustement nous a également permis de vérifier la règle de somme sur l'impulsion. Notons que la très bonne description des données par cette procédure d'ajustements QCD est une preuve de la pertinence des équations DGLAP pour décrire le régime d'évolution de la QCD perturbative au-delà de $Q^2 \simeq 1$ GeV ^{2}.

Nous avons discuté finalement le principe de la mesure de $\alpha_S(M_Z^2)$ par une telle procédure.

Dans ce chapitre, nous avons également indiqué des perspectives pour améliorer la détermination de la densité de gluons et la mesure de $\alpha_S(M_Z^2)$. Dans ce cadre, une prospective réalisée au sein de la collaboration H1 auprès du collisionneur HERA est très intéressante. Dans les années qui viennent, une modification de l'appareillage de l'expérience H1 devrait permettre d'enregistrer une quantité de données beaucoup plus importante qu'actuellement ; en particulier, il est estimé que, si les deux ensembles de données suivants sont acquis :

- un ensemble de données correspondant à une luminosité de $\mathcal{L} \simeq 300\ pb^{-1}$ pour une énergie dans le centre de masse de $\sqrt{s} = 300$ GeV ;
- un ensemble de données correspondant à une luminosité de $\mathcal{L} \simeq 30\ pb^{-1}$ pour une énergie dans le centre de masse de $\sqrt{s} < 300$ GeV , afin de permettre des mesures de F_2 à plus grands x et d'assurer une bonne correspondance avec les mesures des expériences sur cible fixe.

et si, de plus, les incertitudes systématiques sont bien contrôlées, alors un ajustement QCD combinant les nouvelles données de H1 avec celles de SLAC et BCDMS devrait permettre de déterminer $\alpha_S(M_Z^2)$ avec une erreur expérimentale totale de 0.001 [37], soit :

$$\delta_{(expe)}\alpha_S(M_Z^2) \simeq 0.001$$

Rappelons que l'erreur théorique sur $\alpha_S(M_Z^2)$ est estimée à 0.004 [33] :

$$\delta_{(theo)}\alpha_S(M_Z^2) \simeq 0.004$$

Cependant, si une telle précision est atteinte dans les ajustements QCD (avec $\delta_{(expe)}\alpha_S(M_Z^2) \simeq 0.001$), alors la valeur $\delta_{(theo)}\alpha_S(M_Z^2)$ devrait également être réduite, en adoptant la même méthode que celle décrite dans la référence [33].

Nous revenons dans un chapitre ultérieur sur la précision actuelle de la procédure d'ajustements QCD, en incluant les mesures de F_2 déduites de notre analyse expérimentale. Nous décrivons cette analyse dans les chapitres suivants.

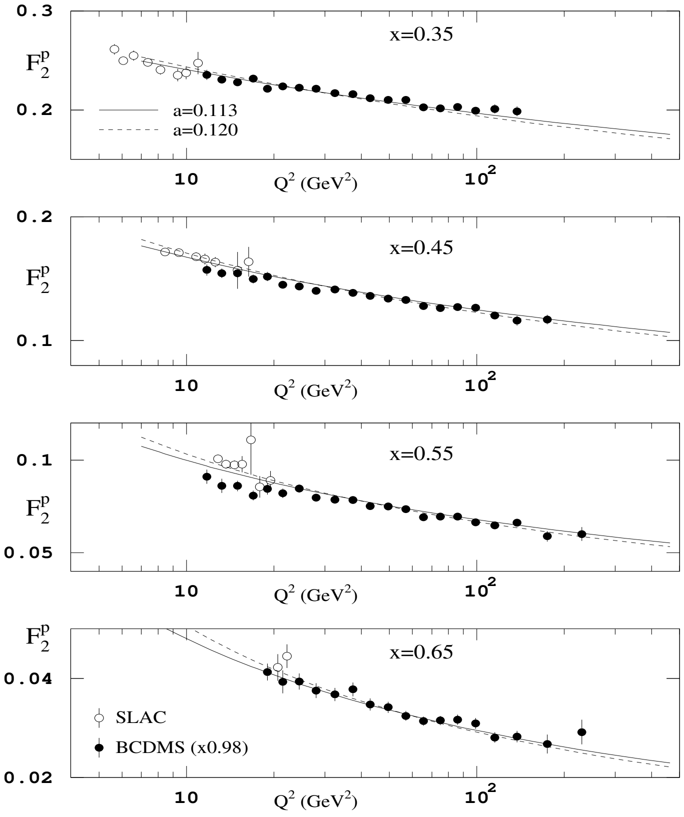


FIG. 4.12 – *Les données de SLAC [32] et BCDMS [24] sont présentées pour différentes valeurs de x, nous superposons deux ajustements QCD réalisés pour* $a = 0.113$ *et* $a = 0.120$ *(*$a = \alpha_S(M_Z^2)$*).*

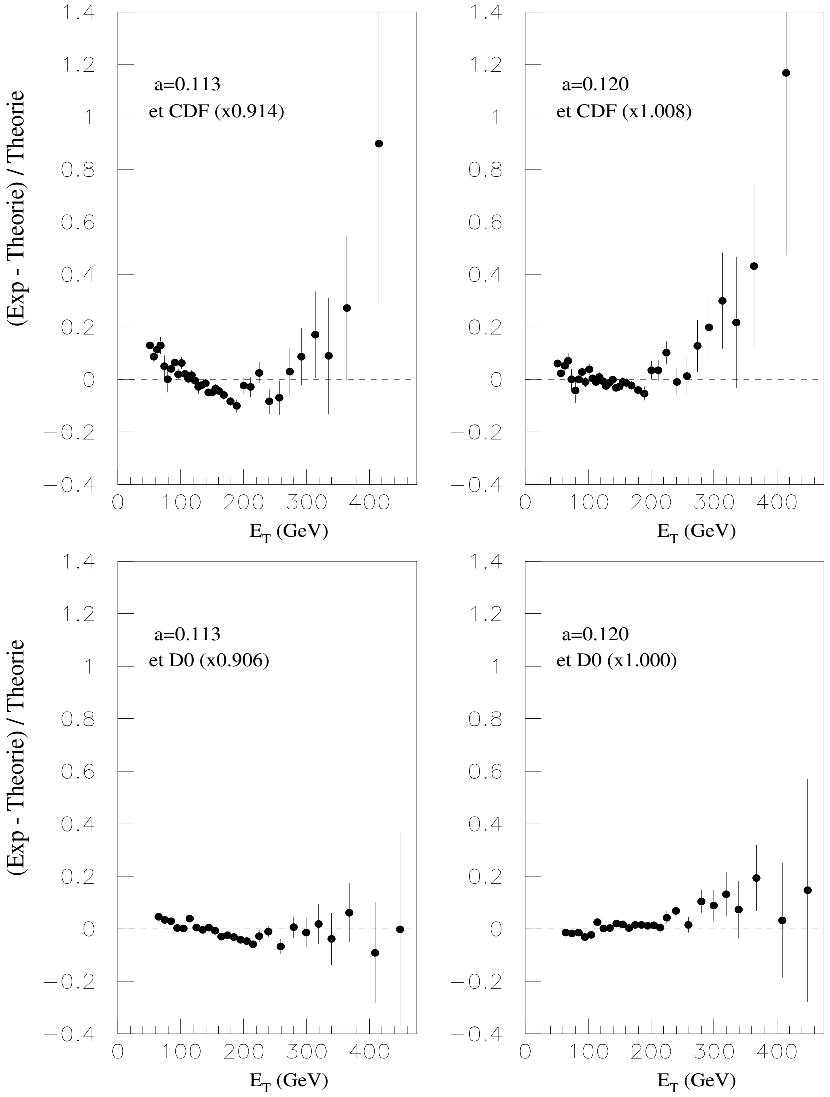


FIG. 4.13 – *Les données de CDF [28] et D0 [29] sont comparées aux prédictions théoriques évaluées pour* $a = 0.113$ *et* $a = 0.120$ *(*$a = \alpha_S(M_Z^2)$*).*

APPENDICE I

On présente dans cet appendice un calcul élémentaire de $\alpha_S(Q^2)$. De plus, comme nous le montrons ci-dessous, cette dérivation donne une compréhension intuitive de l'approximation NLL(Q^2) en QCD perturbative.

On rappelle que la densité d'énergie d'un milieu de constante diélectrique ϵ s'exprime comme suit :

$$E_0 = -\frac{1}{2} 4\pi\chi H^2$$

avec :

$$\mu = 1 + 4\pi\chi$$

$$\epsilon = \frac{1}{\mu}$$

Nous allons calculer, de manière semi-classique, la constante diélectrique du vide QCD ; le vide QCD est constitué par un champ de gluons et un champ de quarks virtuels. Nous déterminons ainsi dans un premier temps, l'énergie du vide pour un champ de gluons puis, pour un champ de quarks virtuels, dans un champ magnétique constant H.

Champ de gluons

- On écrit l'équation du mouvement pour un champ de spin 1 (de charge e) dans un champ magnétique H.
- On en déduit les énergies propres (pour un volume V fini) ; on montre alors que l'énergie du vide pour ce système peut s'écrire :

  $$E_0 = \frac{-11 V e^2 H^2}{96\pi^2} \log \frac{E_2}{E_1}$$

  où E_2 et E_1 sont des coupures UV et IR pour éviter les divergences de la sommation.
- De plus, on rappelle que la charge QCD s'écrit :

  $$g = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

  On en déduit l'énergie du vide pour un champ de gluons :

  $$E_0^{(g)} = \frac{-33 V g^2 H^2}{96\pi^2} \log \frac{E_2}{E_1}$$

Champ de quarks virtuels

- On écrit l'équation du mouvement pour un champ de spin 1/2 (de charge e) dans un champ magnétique H.
- Par un raisonnement similaire au précédent, on peut montrer que l'énergie du vide pour un champ de quarks virtuels s'écrit :

  $$E_0^{(q)} = N_f \frac{V g^2 H^2}{48\pi^2} \log \frac{E_2}{E_1}$$

Constante de couplage en QCD

- On déduit des expressions précédentes l'énergie du vide QCD :

  $$E_0 = E_0^{(g)} + E_0^{(q)}$$

  On détermine alors la constante diélectrique du vide QCD :

  $$\epsilon = \frac{1}{1 + \frac{33-2N_f}{48\pi^2} g^2 \log \frac{E_2}{E_1}}$$

- De plus, la charge QCD g vérifie (dans une approximation semi-classique) :

  $$g^2 = \frac{g_0^2}{\epsilon}$$

  En diffusion inélastique profonde, l'énergie E_2 s'identifie à l'impulsion transférée : $\sqrt{Q^2}$, on en déduit :

  $$\alpha_S(Q^2) = \frac{\alpha_S(\mu^2)}{1 + \frac{33-2N_f}{12\pi} \alpha_S(\mu^2) \log \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

  où $\alpha_S = \frac{g^2}{4\pi}$.

Nous avons ainsi établi, par un raisonnement semi-classique, l'expression LL(Q^2) de $\alpha_S(Q^2)$; dès lors, il est facile de déterminer l'origine des termes qui peuvent intervenir à l'ordre supérieur.

Pour cette démonstration , nous avons supposé que :

$$E_0 = E_0^{(g)} + E_0^{(q)}$$

Ainsi, les champs de spin 1 et 1/2 ne présentent aucun terme d'interférence ; l'approximation d'ordre supérieur consisterait à considérer des termes d'interférence ($E_0^{(I)}$) :

$$E_0 = E_0^{(g)} + E_0^{(q)} + E_0^{(I)}$$

Ce raisonnement nous permet donc de donner une image physique des approximations LL(Q^2) et NLL(Q^2), de même qu'une dérivation élémentaire de $\alpha_S(Q^2)$ (à l'approximation LL(Q^2)).

APPENDICE II

Nous démontrons dans cet appendice qu'il existe une relation entre le nombre minimum de paramètres libres que nous devons considérer dans un ajustement QCD et la sensibilité de cet ajustement à la valeur de $\alpha_S(M_Z^2)$ [34] ; cette discussion repose essentiellement sur le domaine cinématique relatif aux données obtenues sur cible fixe [24], [26], [32] (domaine des grands x), pour lequel la contribution de la densité de gluons est négligeable comparée à l'influence des fonctions de structure de type non-singlet.

Nous avons montré précédemment que dans ce cadre, l'évolution de la fonction de structure F_2 devient :

$$Q^2 \frac{\partial \log F_2(x,Q^2)}{\partial Q^2} \simeq \frac{\alpha_S(Q^2)}{2\pi}\mathcal{F}(x) \tag{4.134}$$

Expérimentalement, la dépendance en Q^2 n'est pas accessible, et la formule précédente s'écrit [34] :

$$\frac{\partial \log F_2}{\partial \log Q^2} = \mathcal{A}(x)$$

où $\mathcal{A}(x)$ est une fonction de x qui dépend également de Λ_{QCD}.

Considérons N domaines cinématiques en x (repérés par l'indice j), pour chaque domaine en x ainsi défini, nous supposons qu'il existe N_j domaines cinématiques en Q^2 (repérés par l'indice i). Pour un domaine cinématique en x donné, nous pouvons réaliser un ajustement linéaire de $\log F_2$ en fonction de $\log Q^2$ par la méthode des moindres carrés. On note $a_j(x_j)$ et $b_j(x_j)$ la pente et la coordonnée à l'origine de cet ajustement pour le domaine en x de valeur moyenne x_j. On note $(\log F_2)_{j,i}$ et $\Delta\log F_{2_{j,i}} = \frac{\Delta F_{2_{j,i}}}{F_{2_{j,i}}}$ les observables et leurs incertitudes associées pour le domaine (j,i) considéré.

Nous pouvons écrire la formule suivante déduite de la minimisation par rapport à $b_j(x_j)$:

$$\prec (\log F_2)_{j,i} \succ_{((Q^2)_i)_{i\in[1,N_j]}}(x_j) = a_j(x_j) \prec \log Q^2 \succ_{((Q^2)_i)_{i\in[1,N_j]}}(x_j) + b_j(x_j)$$

avec de plus :

$$\prec (\log F_2)_{j,i} \succ_{((Q^2)_i)_{i\in[1,N_j]}}(x_j) = \frac{\sum_i \frac{(\log F_2)_{j,i}}{(\Delta(\log F_2)_{j,i})^2}}{\sum_i \frac{1}{(\Delta(\log F_2)_{j,i})^2}}(x_j)$$

$$\prec (\log Q^2)_{j,i} \succ_{((Q^2)_i)_{i\in[1,N_j]}}(x_j) = \frac{\sum_i \frac{(\log Q^2)_{j,i}}{(\Delta(\log F_2)_{j,i})^2}}{\sum_i \frac{1}{(\Delta(\log F_2)_{j,i})^2}}(x_j)$$

Nous sommes ainsi en mesure de définir un estimateur de type χ^2 associé aux pentes logarithmiques $\frac{\partial \log F_2}{\partial \log Q^2} = \mathcal{A}(x)$, que l'on note ${\chi_{PL}}^2$; de plus, comme les données considérées (à grands x) ne sont sensibles qu'aux pentes logarithmiques, il convient de réaliser par la suite la procédure d'ajustements QCD pour ces données en minimisant l'estimateur ${\chi_{PL}}^2$:

$$ {\chi_{PL}}^2 = \sum_j \Big(\frac{a_j(x_j) - \mathcal{A}(x_j)}{(\Delta a_j(x_j))^2}\Big)^2 \tag{4.135} $$

où $\Delta a_j(x_j)$ représente l'erreur sur la détermination de $a_j(x_j)$ par la méthode des moindres carrés.

Cependant, l'estimateur ${\chi_{PL}}^2$ peut être relié à l'estimateur χ^2 sommé sur l'ensemble des degrés de liberté du problème ; en particulier ; s'il se trouve que la relation entre ces deux quantités est complètement arbitraire, la minimisation du χ^2 (sommé sur l'ensemble des degés de liberté du problème) qui est associée à la procédure d'ajustements QCD que nous avons décrite dans ce chapitre n'est pas correcte pour les données à grands x qui nous intéressent ici.

La quantité $\log \mathcal{F}_2(x, Q^2)$ peut être paramétrisée par deux fonctions : $\mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{B}(x)$, où $\mathcal{B}(x)$ n'est pas spécifiée par la théorie :

$$ \log \mathcal{F}_2(x, Q^2) = \mathcal{A}(x) \log(Q^2) + \mathcal{B}(x) $$

Alors :

$$ \begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{j,i} \Big(\frac{(\log F_2)_{j,i} - \log \mathcal{F}_2(x_j, Q_i^2)}{(\Delta(\log F_2)_{j,i})^2}\Big)^2 && (4.136) \\ &= \sum_{j,i} \Big(\frac{(\log F_2)_{j,i} - \mathcal{A}(x_j)\log({Q^2}_i) - \mathcal{B}(x_j)}{(\Delta(\log F_2)_{j,i})^2}\Big)^2 && (4.137) \end{aligned} $$

On minimise cette dernière expression par rapport à $\mathcal{B}(x)$, on obtient les relations suivantes :

$$ \prec (\log F_2)_{j,i} \succ_{((Q^2)_i)_{i\in[1,N_j]}}(x_j) = \mathcal{A}(x_j) \prec \log Q^2 \succ_{((Q^2)_i)_{i\in[1,N_j]}}(x_j) + \tilde{B}_j(x_j) \tag{4.138} $$

Deux cas sont alors possibles :

- Soit la fonction $\mathcal{B}(x)$ satisfait les N conditions :

  $$ \mathcal{B}(x_j) = \tilde{B}_j(x_j) $$

  On note :

  $$ \delta_{j,i} = (\log F_2)_{j,i} - a_j(x_j)(\log Q^2)_{j,i} - b_j(x_j) \tag{4.139} $$

  Dans les calculs qui suivent, nous écrivons :

  $$ \prec O_{j,i} \succ_j = \prec O_{j,i} \succ_{((Q^2)_i)_{i\in[1,N_j]}}(x_j) $$

  $$ \prec O_{j,i} \succ_{((Q^2)_i)_{i\in[1,N_j]}}(x_j) = \frac{\sum_i \frac{O_{j,i}}{(\Delta(\log F_2)_{j,i})^2}}{\sum_i \frac{1}{(\Delta(\log F_2)_{j,i})^2}}(x_j) $$

où O est une observable qui dépend de x et Q^2. Comme $\delta_{j,i} = (\log F_2)_{j,i} - a_j(x_j)(\log Q^2)_{j,i} - b_j(x_j)$, les définitions de $a_j(x_j)$ et $b_j(x_j)$ impliquent que :

$$\prec \delta_{j,i} \succ_j = 0$$

Nous avons :

$$\chi^2 = \sum_{j,i} \left(\frac{(a_j(x_j) - \mathcal{A}(x_j))((\log Q^2)_{j,i} - \prec (\log Q^2)_{j,i} \succ_j) + \delta_{j,i}}{\Delta(\log F_2)_{j,i}} \right)^2$$

De plus :

$$(\Delta a_j(x_j))^2 = \frac{\frac{1}{\prec (\frac{1}{\Delta(\log F_2)_{j,i}})^2 \succ_j}}{\prec ((\log Q^2)_{j,i})^2 \succ_j - (\prec (\log Q^2)_{j,i} \succ_j)^2}$$

$$\prec \left(\frac{1}{\Delta(\log F_2)_{j,i}}\right)^2 \succ_j = \sum_i \left(\frac{1}{\Delta(\log F_2)_{j,i}}\right)^2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_j \left(\frac{a_j(x_j) - \mathcal{A}(x_j)}{(\Delta a_j(x_j))^2}\right)^2 + \sum_{j,i} \left(\frac{\delta_{j,i}}{\Delta(\log F_2)_{j,i}}\right)^2 && (4.140) \\ &= {\chi_{PL}}^2 + \sum_{j,i} \left(\frac{\delta_{j,i}}{\Delta(\log F_2)_{j,i}}\right)^2 && (4.141) \end{aligned}$$

où $\sum_{j,i} \left(\frac{\delta_{j,i}}{\Delta(\log F_2)_{j,i}}\right)^2$ est un terme constant (indépendant de Λ_{QCD}).

Les estimateurs χ^2 et ${\chi_{PL}}^2$ exprimés en fonction de Λ_{QCD} sont donc parallèles et ont le même minimum par rapport à Λ_{QCD}. La procédure d'ajustements QCD que nous avons décrite est ainsi bien adaptée à la détermination de Λ_{QCD} (ou $\alpha_S(M_Z^2)$).

- Soit la fonction $\mathcal{B}$ ne vérifie pas les relations $\mathcal{B}(x_j) = \tilde{B}_j(x_j)$, nous pouvons écrire dans ce cas de façon générale :

  $$\mathcal{B}(x_j) = \tilde{B}_j(x_j) + \Delta\tilde{B}_j(x_j)$$

  où $\Delta\tilde{B}_j$ dépend de Λ_{QCD}.

  On trouve alors :

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_j \left(\frac{a_j(x_j) - \mathcal{A}(x_j)}{(\Delta a_j(x_j))^2}\right)^2 + \sum_{j,i} \left(\frac{\delta_{j,i}}{\Delta(\log F_2)_{j,i}}\right)^2 \\ &\quad + \sum_j \left(\Delta\tilde{B}_j \prec \frac{1}{\Delta(\log F_2)_{j,i}} \succ_{((Q^2)_i)_{i\in[1,N_j]}}\right)^2 && (4.142) \\ &= {\chi_{PL}}^2 + \sum_{j,i} \left(\frac{\delta_{j,i}}{\Delta(\log F_2)_{j,i}}\right)^2 + \sum_j \left(\Delta\tilde{B}_j \prec \frac{1}{\Delta(\log F_2)_{j,i}} \succ_{((Q^2)_i)_{i\in[1,N_j]}}\right)^2 && (4.143) \end{aligned}$$

avec :

$$(\prec \frac{1}{\Delta(\log F_2)_{j,i}} \succ_{((Q^2)_i)_{i\in[1,N_j]}})^2 = \sum_i (\frac{1}{\Delta(\log F_2)_{j,i}})^2$$

Alors, les estimateurs χ^2 and ${\chi_{PL}}^2$ n'ont pas le même minimum par rapport à Λ_{QCD} et la procédure d'ajustements QCD n'est pas bien définie.

Il ressort donc des considérations précédentes qu'il existe une relation entre le nombre minimum de paramètres libres que nous devons considérer dans un ajustement QCD et la sensibilité de cet ajustement à la valeur de $\alpha_S(M_Z^2)$, les paramétrisations initiales doivent être suffisamment souples (en fonction de x) pour permettre la vérification des N relations $\mathcal{B}(x_j) = \tilde{B}_j(x_j)$.

Dans ce cas, la procédure qui consiste à déterminer la valeur de $\alpha_S(M_Z^2)$ en utilisant les pentes logarithmniques est bien définie.

Bibliographie

[1] G.Parisi, *Rencontres de Moriond* (1976).

[2] V.N.Gribov et L.N.Lipatov, *Sov. Jour. Nucl. Phys.* **15** (1972) 438. et 675. ;
G.Altarelli et G.Parisi, *Nucl. Phys.* **126** (1977) 297 ;
Yu.L.Dokhshitzer, *Sov. Phys. JETP* **46** (1977) 641.

[3] G. Curci, W. Furmański, R. Petronzio, *Nucl.Phys.* **B175** (1980) 27.

[4] W. Furmański, R. Petronzio, *Phys.Lett.* **B97** (1980) 437.

[5] E.G. Floratos, C. Kounnas, R. Lacaze, *Phys.Lett.* **B98** (1981) 89.

[6] W. Furmański, R. Petronzio, *Nucl. Phys.* **B195** (1982) 237.

[7] W.K. Tung, *Nucl. Phys* **B315** (1989) 378.

[8] D.A. Kosower, *Saclay-SphT/T97-43* (1997).

[9] L. Schoeffel, *Proceedings des Journées des Jeunes Chercheurs* (1996) 137.

[10] A.D. Martin,R.G. Roberts,W.J. Stirling, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 6734.

[11] W.J. Marciano, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 580.

[12] A.D. Martin,R.G. Roberts,W.J. Stirling, *RAL-95-021* (1995).

[13] CTEQ Collaboration, H.L. Lai et al., *Phys. Rev.* **D51** (1995) 4763 ; *MSUHEP-60426* (1996).

[14] E. Laernen,S. Riemersma,J.Smith et W.L. van Neerven, *Nucl. Phys.* **B392** (1993) 162.

[15] EMC Collaboration, J.J. Aubert et al., *Nucl. Phys.* **B213** (1983) 31.

[16] H1 Collaboration, C. Adloff et al., *DESY-96-236* (1996).

[17] M.Buza,Y.Matiounine,J.Smith et W.L. van Neerven, *NIKHEF/96-027* (1996).

[18] R.G. Roberts, *RAL-97-024* (1997).

[19] CCFR Collaboration, A.O. Bazarko et al., *Zeit. Phys.* **C65** (1995) 189.

[20] NMC Collaboration, P.Amaudruz et al., *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 2712.

[21] NA51 Collaboration, A. Baldit et al., *Phys. Lett.* **B332** (1994) 244.

[22] H1 Collaboration, S. Aid et al., *Nucl. Phys.* **B470** (1996) 3.

[23] ZEUS Collaboration, M. Derrick et al., *DESY- 96-076* et *Z. Phys.* **C69** (1996) 607.

[24] BCDMS Collaboration, A.C. Benvenuti et al., *Phys. Lett.* **B223** (1989) 485.

[25] BCDMS Collaboration, A.C. Benvenuti et al., *Phys. Lett.* **B237** (1989) 592.

[26] NMC Collaboration, M. Arneodo et al., *Phys. Lett.* **B364** (1995) 107.

[27] E-665 FNAL Collaboration, M.R. Adams et al., *FNAL-Pub-95/396-E* (1996).

[28] CDF Collaboration, *FERNILAB-CONF-94/146-E* (1994).

[29] D0 Collaboration, J. Blazey, *Rencontres de Moriond (QCD)* (1996).

[30] UA6 Collaboration, G. Sozzi et al, *Phys. Lett.* **B317** (1993) 243.

[31] W.J. Stirling, *hep-ph/9709429* (1997).

[32] L.W. Whitlow et al., *Phys. Lett.* **B 282** (1992) 475.

[33] M. Virchaux, A. Milsztajn, *Phys. Lett.* **B 274** (1992) 221.

[34] M. Virchaux, *Thèse d'état* (1988); A. Milsztajn, *Thèse de doctorat* (1989).

[35] A.D. Martin,R.G. Roberts,W.J. Stirling, *RAL-96-037* (1996).

[36] T. Carli, *Note H1-09/97-529* (1997).

[37] C. Pascaud, M. Klein, M. Botje, *Proceedings of the Workshop (HERA) 1995/96* (1996).

Chapitre 5

LE DETECTEUR H1

Le détecteur H1 est l'un des deux détecteurs situés auprès de l'accélérateur HERA conçus pour étudier différents aspects physiques des collisions *ep*. Il est composé de nombreux sous-systèmes de détection qui fournissent des informations complémentaires, lesquelles permettent de déduire les propriétés des collisions étudiées. Une trentaine d'instituts ont participé à la réalisation du détecteur. La conception du détecteur a débuté en 1985, et c'est en 1988 que les premiers modules du calorimètre à Argon Liquide ont été testés au CERN. L'assemblage du calorimètre dans le cryostat a été réalisé en 1990.

En 1995, une transformation du détecteur a été opérée pour permettre une étude plus précise de la physique à bas x.

Dans ce chapitre, nous décrivons les principales caractéristiques du détecteur H1 [1] et nous discutons précisément les motivations et les performances des transformations de 1995 [2].

HERA fournit un taux de collisions très important qui nécessite un système de déclenchement et d'acquisition sophistiqué que nous décrivons également dans ce chapitre.

5.1 Vue générale

Le détecteur H1 doit remplir plusieurs objectifs afin d'exploiter au mieux le potentiel physique du collisionneur HERA :

- **Détection de l'électron diffusé** : l'identification et la mesure de l'énergie de l'électron diffusé est impérative pour étudier les réactions de diffusion profondément inélastique, particulièrement lorsque celui-ci est diffusé avec un Q^2 modéré dans ce que nous appelons la région arrière du détecteur.

- **Détection des jets hadroniques** : une calorimétrie à bonne résolution et fine granularité est nécessaire pour caractériser l'état final hadronique de nombreux processus. Le calorimètre impliqué dans ce type de mesure doit alors être hermétique pour assurer une bonne mesure de la balance en énergie transverse.

- **Trajectographie des particules chargées** : la mesure de l'impulsion des particules chargées et leur identification est importante ; ceci est réalisé par des trajectographes (détecteurs de traces) couvrant un grand angle solide : un champ magnétique courbe les trajectoires et permet la mesure de l'impulsion et la mesure de l'énergie manquante permet l'identification de la particule.

- **Identification des muons** : les saveurs lourdes et la physique exotique correspondent à des processus où des muons sont produits dans l'état final. Leur identification est donc un objectif majeur pour caractériser de tels processus.
- **Mesure de la luminosité** : une mesure précise de la luminosité est fondamentale dans la détermination des sections efficaces.
- **Déclenchement et acquisition** : Le fort taux de croisements collisionnels fourni par HERA (10.4 MHz) et le bruit de fond important dû par exemple aux interactions du faisceau de protons avec le gaz résiduel du tube-faisceau ou avec les parois de ce dernier implique un effort considérable pour extraire le signal physique de ce bruit de fond. Le détecteur doit donc vérifier et digitaliser un grand nombre de canaux (environ 250000) tout en minimisant le temps mort lors de l'acquisition.

De plus, la machine HERA est caractérisée par une grande différence entre les énergies des faisceaux de leptons et de protons, à la différence du LEP ou du TeVatron. La structure des événements est ainsi déplacée dans la direction des protons incidents (ce que nous appelons l'avant du détecteur), qui sont plus énergétiques que les leptons. Le détecteur H1 doit donc permettre des mesures précises dans cette région. Sa géométrie asymétrique respecte cette contrainte comme on peut le voir sur la fig. 5.1.

Le système de coordonnées du détecteur H1 est défini par rapport à l'axe optique -axe z-, parallèle à la direction du proton, l'axe y est vertical et l'axe x complète le trièdre direct x, y, z ; l'origine est définie au point d'interaction nominal. En coordonnées polaires, on note θ l'angle polaire par rapport à la direction du faisceau de protons et ϕ l'angle azimutal orienté par rapport à l'axe x : l'asymétrie des énergies de faisceaux de protons et de leptons fournis par HERA implique alors que de nombreuses particules sont produites vers l'avant dans la direction $+z$.

En se déplaçant du centre du détecteur vers sa périphérie, le détecteur H1 est constitué de plusieurs sous-détecteurs (voir fig. 5.1) ; on distingue[1] :

- **Le tube faisceau** constituant l'axe "optique" de l'expérience.
- Les détecteurs de traces (arrière et central) au Silicium (non représentés sur la fig. 5.1) qui entourent le tube faisceau.
- **Les détecteurs de traces central et avant**, constitués de plusieurs chambres à dérives et chambres proportionnelles.
- **Les calorimètres** : le calorimètre à Argon Liquide, qui comporte une partie électromagnétique et une partie hadronique, un calorimètre à l'avant et un

---

[1] On note en caractères gras les éléments qui sont effectivement représentés sur cette figure, d'autres sous-systèmes ne le sont pas, nous les citons dans la liste qui suit pour les situer dans l'ensemble du détecteur, ils sont notés en caractères normaux

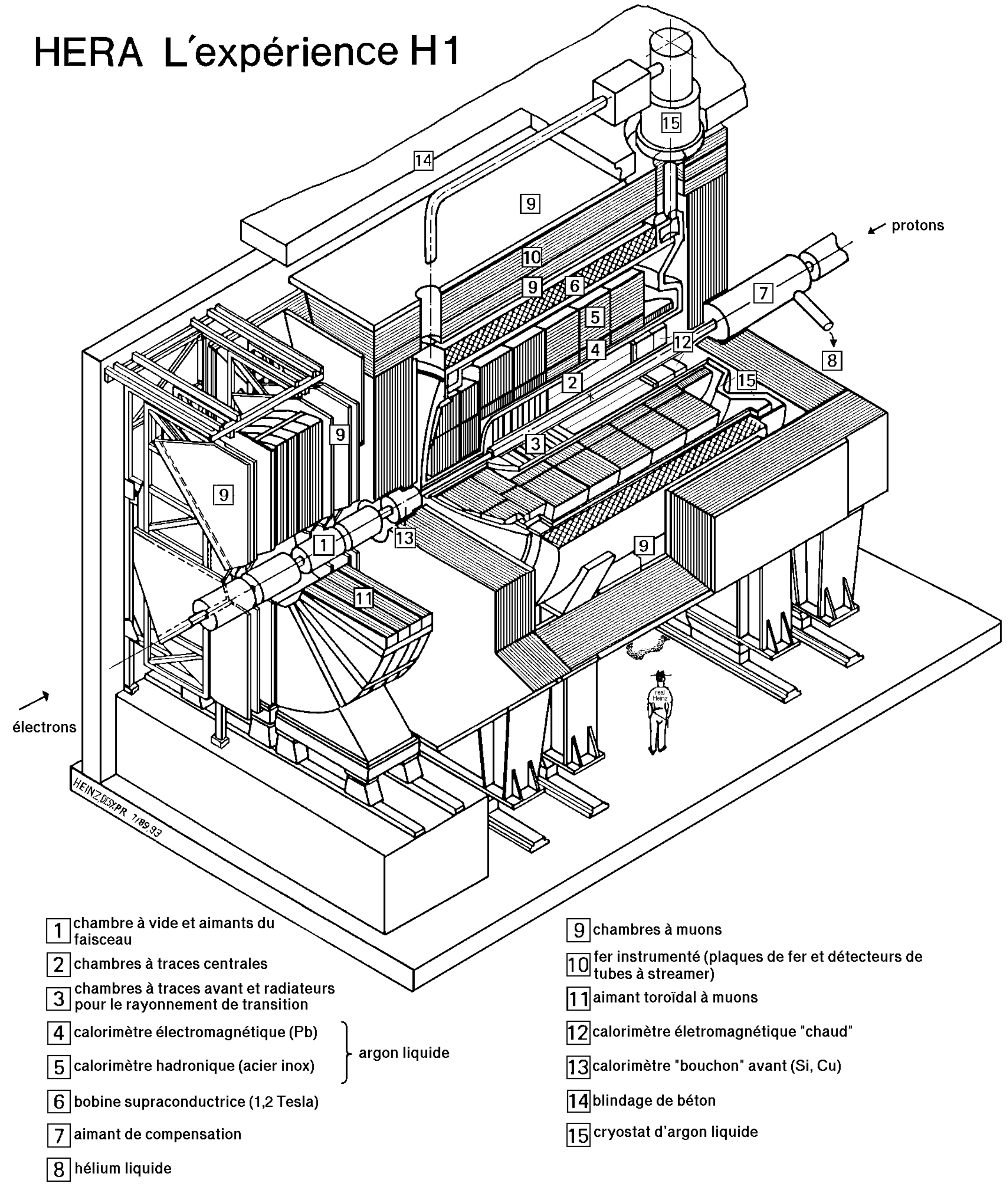


FIG. 5.1 – *Schéma général du détecteur H1 : la taille du détecteur H1 est d'environ* $12m \times 10m \times 15m$ *et son poids d'environ* 2800 t*. Les détecteurs placés très loin du tube faisceau ne sont pas représentés sur cette figure.*

calorimètre à l'arrière (le SPACAL) -qui comporte également une partie électromagnétique et une partie hadronique-, ce dernier calorimètre a été installé en 1995.

- **Le cryostat** contenant le calorimètre à argon liquide.
- **La bobine supraconductrice** de 3 m de rayon entoure le cryostat, elle génère un champ magnétique uniforme de 1.2 Tesla.
- **Un aimant supraconducteur compensateur**, situé dans la région arrière, corrige les distortions orbitales créées par le champ de l'aimant principal.
- **Le fer instrumenté** assure le retour des lignes de champ magnétique. Il est aussi utilisé pour détecter les fins de gerbes hadroniques, ainsi que les muons.
- **Des détecteurs de muons** additionnels vers l'avant (ou dans la direction du faisceau de protons) ainsi qu'un aimant toroïdal permettent l'identification et la mesure de l'impulsion des muons.
- **Un blindage de béton** entoure l'ensemble du détecteur pour minimiser le niveau de radiation dans le hall expérimental.
- D'autres détecteurs incluant notamment le système de mesure de luminosité et le spectromètre à protons sont situés dans le tunnel d'accélération à l'arrière et à l'avant du détecteur principal respectivement.

Dans la suite, nous décrivons plus précisément ces principaux sous-systèmes.

5.2 Détecteurs de traces

Le système de détection de traces de H1 est représenté sur la fig. 5.2, il est formé de deux composantes principales : le trajectographe (détecteur de traces) central couvrant la région $10^o < \theta < 170^o$ et le trajectographe avant couvrant la région $7^o < \theta < 25^o$. Chacun de ces sous-systèmes est à son tour divisé en différents détecteurs qui fournissent des informations complémentaires sur les traces des particules chargées. De plus, la partie arrière de H1 est couverte par la "Backward Drift Chamber" (BDC) ($151^o < \theta < 177.5^o$) installée en 1995. Les trajectographes au Silicium, les "Central (Backward) Silicon Tracker"(CST,BST), sont appelés à donner une mesure précise des traces proches du point d'interaction de l'événement ; ces détecteurs ont été partiellement installés en 1995 et n'ont été utilisables complètement qu'à partir de 1996.

Les trajectographes permettent de reconstruire les traces des particules chargées et de mesurer leurs impulsions par la courbure de ces traces ; c'est aussi à partir des traces reconstruites dans un événement que la position du vertex d'interaction est déterminée.

Les détecteurs de traces sont placés dans le champ magnétique de 1.2 Tesla délivré par la bobine supraconductrice (ce champ est homogène à 0.3% près dans la partie centrale).

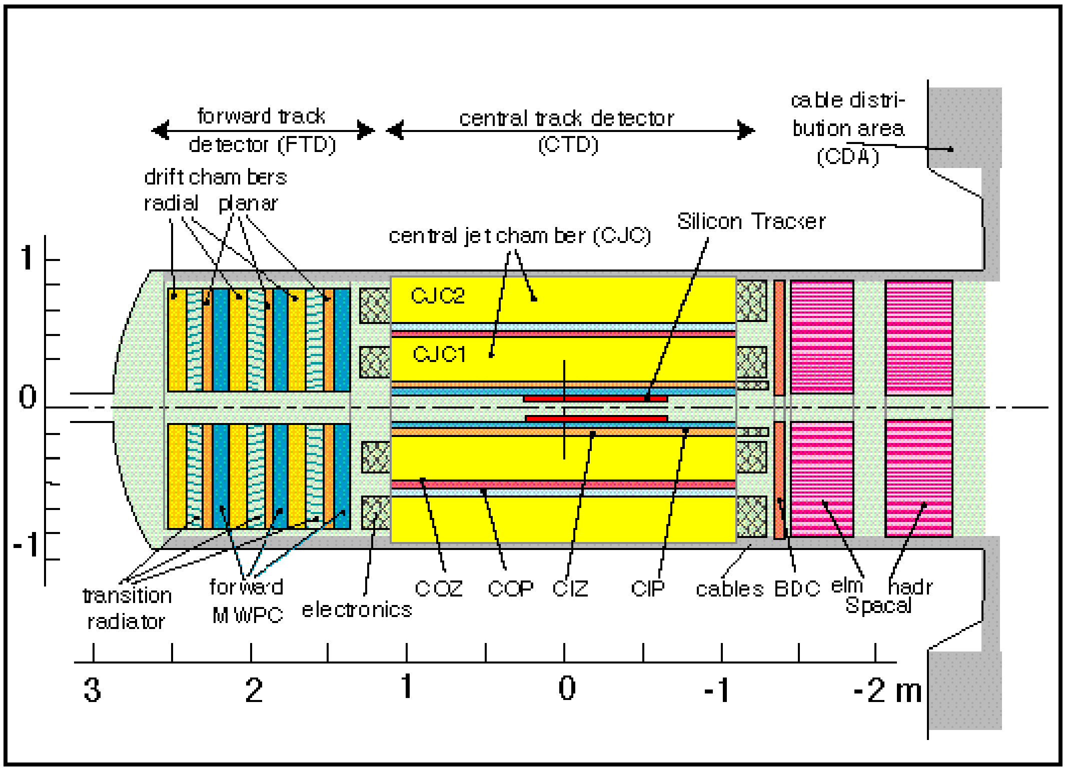


FIG. 5.2 – *Vue longitudinale des détecteurs de traces plongés dans le champ magnétique délivré par la bobine supraconductrice de H1.*

Les systèmes avant et central de détection de traces sont tous deux composés de chambres à dérive et de chambres proportionnelles multi-fils (“Multi-Wire Proportional Chambers”,MWPCs). On distingue par exemple (voir fig. 5.2) :

- Dans la partie centrale : les “Central Jet Chambers” (CJC) et les “Central Inner (Outer) Z-chambers” (CIZ,COZ) qui sont des chambres à dérive, ainsi que les “Central Inner (Outer) Proportional chambers” (CIP, COP) qui sont des chambres proportionnelles.

- Dans la partie avant : les chambres à dérive radiales et planaires ainsi que les “Forward Multi-Wires Proportional Chambers” (FMWPC) qui sont des chambres proportionnelles.

Les chambres à dérive sont utilisées pour les mesures précises de segment de traces : les impacts peuvent être repérés à environ $150\mu m$ dans la direction de dérive et la coordonnée parallèle au fil peut être localisée avec une précision de 1% de la longueur de celui-ci.

Les MWPCs ont, quant à elles, une résolution spatiale limitée par l’espacement entre les fils, et sont donc moins précises que les chambres à dérive, cependant leur temps de réponse court au passage des particules chargées les rend très utiles dans le mécanisme de déclenchement de l’acquisition.

Nous détaillons dans ce qui suit ces différentes sous-systèmes.

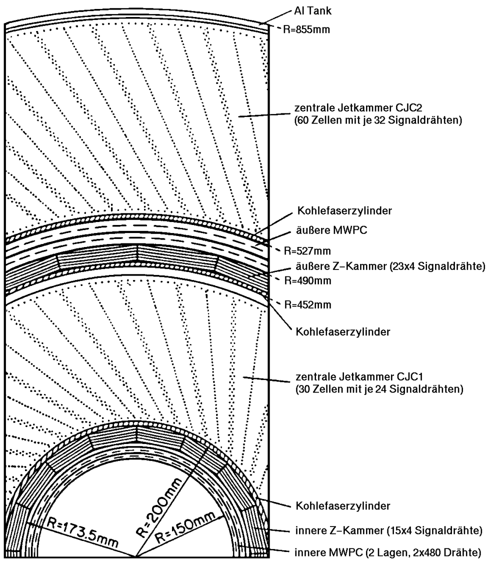


FIG. 5.3 – *Coupe transverse du système central de détection de traces de H1.*

5.2.1 Les chambres centrales

Les chambres CJC

Les chambres CJC1 et CJC2 sont des chambres à dérive cylindriques. Elles font toutes deux environ 2 mètres de long, et ont une épaisseur de $\simeq$ 25 cm pour CJC1 et $\simeq$ 30 cm pour CJC2. La chambre CJC1 est la plus proche du faisceau (son rayon intérieur est de 20 cm). La couverture angulaire de la CJC1 ($10^o \leq \theta \leq 170^o$) est donc meilleure que celle de la CJC2 ($25^o \leq \theta \leq 155^o$). Ces deux chambres sont constituées de fils parallèles à l'axe des faisceaux. Une coupe transverse du détecteur de traces central est représentée sur la fig. 5.3.

On constate que les fils font avec la normale un angle de 30^o. Cet angle "de Lorentz" permet de compenser l'effet du champ magnétique sur la dérive des particules. Ainsi, toute particule va traverser au moins deux cellules adjacentes, ce qui permet de déterminer le sens de propagation de la particule chargée.

Comme nous l'avons déjà indiqué ci-dessus, les chambres (centrales) à dérive: CJC1 et CJC2 ont une bonne résolution (150μm) en (x, y). Par division de charge, elles permettent aussi de mesurer la position suivant l'axe z des faisceaux, mais avec une précision de l'ordre de 20 mm (1% de la longueur des fils). La mesure de la perte d'énergie par unité de longueur (dE/dx) est possible à 6% près. La résolution sur l'impulsion p de la trace est proportionnelle au carré de p :

$$\frac{\Delta p}{p^2} = 3.10^{-3} \text{ GeV}^{-1} \quad .$$

Notons également que le temps de réponse de ces chambres est assez long (1.5μs), celui-ci étant limité par le temps de dérive des électrons. La tension appliquée sur l'anode est de l'ordre du kV, ce qui donne un champ électrique dans la région de dérive de 1kV/cm. La vitesse de dérive des électrons est alors $v_D \simeq 50\mu$m/ns.

Les chambres CIZ/COZ

La chambre CIZ est la plus proche du tube à vide (à 18 cm), la COZ est située entre la CJC1 et la CJC2, à $\simeq$ 50 cm du tube faisceau. Ces deux chambres sont constituées de fils perpendiculaires à l'axe des faisceaux. Suivant l'axe z, la CIZ est constituée de 15 anneaux, chaque anneau comportant 16 cellules qui définissent une structure polygonale. Chaque cellule comprend 4 fils d'anode. Ces chambres permettent de mesurer la coordonnée z avec une très bonne précision (de l'ordre de 300μm), et apportent donc une information complémentaire à celle délivrée par les chambres CJC. Etant aussi des chambres à dérive, les temps de réponse de ces chambres sont là encore importants.

Les chambres CIP/COP

Le principal inconvénient des chambres décrites précédemment est leur temps de réponse ($\simeq 1.5 \mu s$), à comparer au temps de croisement de 96 ns. Nous discutons dans la suite le mécanisme du système de déclenchement qui doit discriminer les événements intéressants pour la physique et les événements de bruit de fond, cette décision de "garder" ou non un événement repose sur certains critères et la détermination d'un vertex d'interaction est un critère important. Nous y revenons dans la suite. Puisqu'on ne peut pas attendre la réponse des chambres CJC et CIZ/COZ, deux chambres fonctionnant en régime proportionnel ont été installées : la CIP (la plus proche de l'axe des faisceaux), et la COP. Leur temps de réponse est rapide ($\simeq$ 50 ns) puisque les électrons ne dérivent pas. Ce sont donc ces chambres qui sont utilisées par le système de déclenchement.

5.2.2 Les chambres à l'avant

Le système de détection de traces à l'avant couvre l'angle polaire $7^o \leq \theta \leq 25^o$.

Comme on peut le voir sur la fig. 5.4, ce système est constitué de trois modules identiques, chacun comprenant :

- Des chambres à dérive planaires, dont les fils sont perpendiculaires à l'axe des faisceaux. Chaque module comprend en fait trois chambres planaires, tournées de 60^o en Φ l'une par rapport à l'autre. L'information de ces chambres permet de mesurer l'angle polaire θ avec une résolution inférieure à 1 mrad.

- Une chambre à dérive radiale, dont les fils sont perpendiculaires à l'axe des faisceaux. Elle donne une résolution dans le plan transverse (x, y) de l'ordre de 150 μm. Une mesure de la coordonnée r est de plus possible par division de charge.

- Un radiateur de transition, constitué de feuilles de propylène. En traversant ce radiateur, un électron émet un rayonnement X, détecté dans les chambres à dérive radiales. Ceci devrait permettre d'identifier les particules (de séparer les électrons des pions), mais n'est pas utilisé pour l'instant.

- Une chambre proportionnelle multifils, qui participe de même que les CIP/COP au premier niveau de déclenchement. Leur temps de réponse est de $\simeq$ 20 ns.

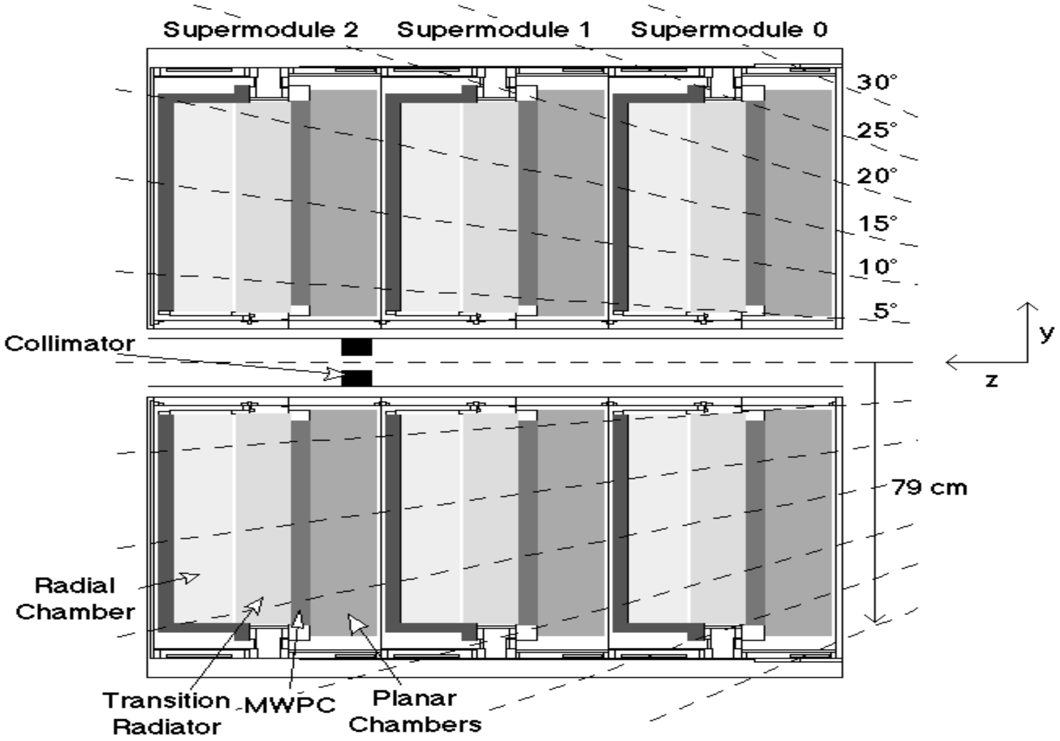


FIG. 5.4 – *Vue longitudinale des détecteurs de traces avant de H1.*

5.2.3 La chambre arrière (BDC)

La BDC a été installée en 1995, elle est conçue pour mesurer précisément les traces des particules chargées vers l'arrière [2], en particulier la trace de l'électron diffusé à moyen Q^2 dans les processus de diffusion profondément inélastique.

Elle comprend huit plans de fils (de huit octants chacun) disposés suivant quatre orientations différentes -chacune translatée en ϕ de $\Delta\phi = 11.5^o$- (voir fig. 5.5), ce qui permet aux segments de traces d'être reconstruits à partir de l'intersection des impacts dans les plans de fils ; cela permet également une bonne détection des pieds de gerbe pour la séparation des photons et des électrons. La BDC est également conçue pour mesurer les points sur les traces avec une résolution radiale de $\sigma(r) = 0.4mm$ et une résolution azimutale de $\sigma(r\phi) = 0.8mm$.

5.3 Calorimétrie

Les calorimètres, à la différence des détecteurs de traces, permettent aussi de détecter le passage d'une particule neutre électriquement. Le détecteur H1 comporte plusieurs calorimètres : le calorimètre à Argon Liquide, qui est le plus volumineux, le PLUG à l'avant, et le SPACAL à l'arrière et le calorimètre de fin de gerbe (ou fer instrumenté). On représente une vue schématique de l'ensemble de ces sous-détecteurs sur la fig. 5.6.

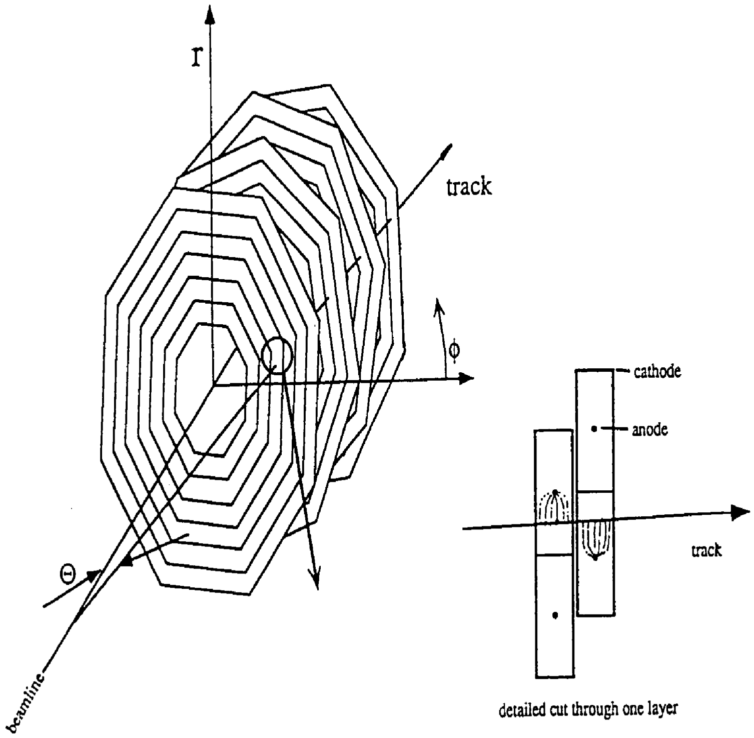


FIG. 5.5 – *Représentation schématique de la BDC montrant la translation azimutale des différents plans de fils. Chaque orientation est composée d'une paire de plans de fils. On a indiqué la disposition relative de ces plans.*

5.3.1 Le calorimètre à Argon Liquide

L'expérience H1 est équipée d'un calorimètre à Argon Liquide (LAr) à échantillonage [3]. L'avantage de l'argon est sa grande inertie chimique, qui assure un signal stable dans le temps et peu sensible à l'effet des radiations.

Le principe est le suivant : le calorimètre est constitué d'un empilement de plaques d'un milieu dense (l'absorbeur) et de couches d'Argon Liquide. Une particule traversant le calorimètre va tout d'abord interagir avec le milieu dense, et perdre de l'énergie en formant des gerbes de particules secondaires. Les particules chargées de ces gerbes vont ensuite ioniser l'Argon Liquide (créer des paires $\{Ar^+, e^-\}$). Ces électrons vont alors dériver du fait du champ électrique appliqué entre deux plaques d'absorbeur, et la quantité de charge collectée est statistiquement proportionnelle à l'énergie de la particule incidente. C'est dans l'Argon Liquide que le signal est formé : on dit que l'argon constitue le milieu actif du calorimètre.

Le calorimètre à Argon Liquide couvre le secteur angulaire $4^o \leq \theta \leq 152^o$. Comme on l'a déjà signalé, il est entièrement plongé dans le cryostat, qui maintient la température de l'argon à 90 K et sa pression à 1.35 bar. Deux parties distinctes composent ce calorimètre : la section électromagnétique et la section hadronique. La fig. 5.7 représente une coupe longitudinale de ce calorimètre.

Le calorimètre LAr est segmenté le long de l'axe des faisceaux en huit roues. Les six premières (BBE,CB1,CB2,CB3,FB1 et FB2) sont divisées dans le plan transverse à l'axe des faisceaux en huit octants de 45^o. Les deux roues à l'avant (IF et OF)

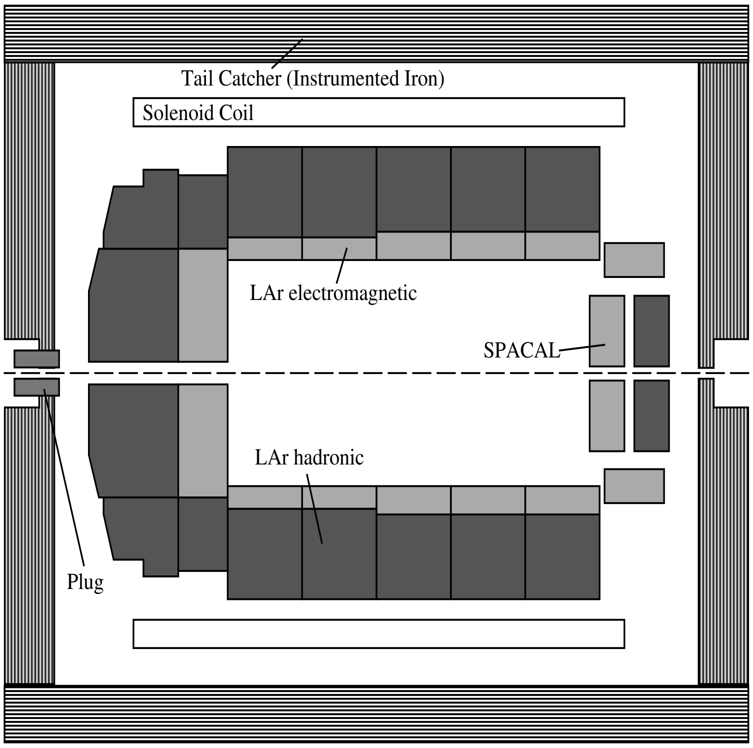


Fig. 5.6 – *Vue schématique $(r - z)$ du système calorimétrique de H1.*

sont constituées de deux moitiés d'anneau. Les interfaces (les "cracks") entre ces différents constituants du calorimètre constituent des zones mortes pour la détection. Néanmoins, les cracks en Φ entre octants d'une roue hadronique ne pointent pas vers le point nominal d'interaction, comme le montre la coupe transverse du calorimètre de la fig. 5.8.

Ainsi, si une particule est diffusée dans un crack en Φ électromagnétique, une partie de son énergie peut être récupérée dans la partie hadronique du calorimètre.

Notons de plus que la roue BBE est uniquement électromagnétique, tandis que la roue la plus à l'avant comprend seulement une partie hadronique.

Enfin, chaque octant est divisé en cellules de lecture (ce sont elles qui permettent de collecter le signal). La structure d'une cellule diffère suivant qu'on est dans la section életromagnétique ou hadronique du calorimètre.

Composition des cellules élémentaires

Une cellule du calorimètre électromagnétique est composée de deux plaques de Plomb (le milieu absorbeur, de densité $Z = 82$) de 2.4 mm d'épaisseur, entourant une couche active d'argon liquide de 2.35 mm d'épaisseur. De part et d'autre de chaque plaque d'absorbeur, on trouve des panneaux de G10 (composant à base de fibre de verre et d'epoxy) à la surface desquels sont disposés les "pads" de lecture. Ce sont vers ces "pads" que dérivent les électrons, sous l'effet d'un champ électrique de $\simeq 0.6$kV/mm créé par des plans de haute tension peints avec de la peinture hautement résistive (HRC) (la haute tension appliquée est de 1500 V). Notons que le

FIG. 5.7 – *Coupe longitudinale du calorimètre à argon liquide*

FIG. 5.8 – *Coupe transverse du détecteur H1. Cette vue met en évidence la symétrie cylindrique de l'appareillage expérimental.*

temps de collecte des charges est relativement long ($\simeq$ 500ns), soit 5 croisements consécutifs des faisceaux. Ces “pads” de lecture sont plus petits dans la partie avant du détecteur (le calorimètre doit être mieux segmenté dans la partie avant, car c'est dans cette direction que la structure des événements est déplacée). Ainsi, ces “pads” ont une surface de 8×8 cm^2 dans la partie centrale (à $\theta \geq 80^o$) et de $\simeq 3-5 \times 3-5$ cm^2 dans la partie avant. Ces cellules élémentaires sont ensuite regroupées en un canal de lecture : c'est un tel canal que nous appelerons “cellule” par la suite. La partie électromagnétique du calorimètre comporte environ 30000 canaux de lecture.

Une cellule du calorimètre hadronique est composée de :

- deux couches d'argon liquide de 2.3 mm d'épaisseur. Au milieu de cette couche active se trouve un panneau de G10, sur lequel sont placées les “pads” de lecture ;
- deux plans de haute tension (de 1.5 mm d'épaisseur) entourent ce milieu actif ;
- deux plaques d'acier inoxydable de 16 mm d'épaisseur, qui constituent le milieu absorbant.

Les plaques dans la partie hadronique sont plus grandes que celles de la partie électromagnétique : utiliser de grandes plaques de Plomb aurait posé des problèmes de tolérance mécanique, c'est pour cela que l'acier a été choisi. La taille des cellules élémentaires hadroniques est entre 2 et 4 fois celle des cellules élémentaires électromagnétiques. A nouveau, les cellules élémentaires sont regroupées en canaux de lecture. Il y en a $\simeq$ 13000 dans le calorimètre hadronique.

Les cellules de lecture électromagnétiques et hadroniques de chaque octant de chaque roue peuvent être regroupées en couches longitudinales (on parle de “layers”) : il y en a entre 3 et 4 dans la partie électromagnétique, et de 4 à 6 dans la section hadronique, suivant la position en θ.

Revenons sur la fig. 5.7. La figure montre l'orientation des plaques d'absorbeur dans le calorimètre. On constate que cette orientation n'est pas la même pour toutes les roues : dans les roues BBE, FB1, FB2 et IF (les roues à l'arrière ou à l'avant), ces plaques sont verticales ; dans les roues centrales CB1,CB2 et CB3, elles sont horizontales. La raison de ce choix est la suivante : le fonctionnement d'une cellule est meilleur si les particules traversent les plaques avec un angle incident inférieur à 45^o par rapport à la normale des plaques.

Résolution en énergie

La résolution en énergie du calorimètre électromagnétique s'écrit, en ne gardant que le terme d'échantillonage :

$$\frac{\sigma_E}{E} \simeq \frac{12\%}{\sqrt{E}} \quad .$$

Le terme constant est de plus inférieur à $\simeq 1\%$. La résolution du calorimètre hadronique est égale à $\simeq 50\%/\sqrt{E}$, avec un terme constant de l'ordre de 2%.

Epaisseur en X_0 et λ_I

L'épaisseur du calorimètre électromagnétique varie entre 20 et 30 longueurs de radiation X_0, et entre 1.0 et 1.4 longueurs d'interaction λ_I. Rappelons qu'une longueur de radiation est la distance après laquelle un électron a perdu $1 - e^{-1} \simeq 66\%$ de son énergie par Bremsstrahlung. La longueur X_0 dépend ensuite du matériau traversé par la particule incidente ($X_0 = 5.6$ mm pour le Plomb). Il faut en moyenne une vingtaine de X_0 pour absorber une gerbe électromagnétique.

Une longueur d'interaction λ_I est définie comme étant le libre parcours moyen d'un hadron entre deux interactions. L'épaisseur totale du calorimètre varie entre $\simeq 5\lambda_I$ (dans la partie centrale) et $\simeq 9\lambda_I$ (à l'avant).

5.3.2 Le calorimètre avant : PLUG

On a vu dans la section précédente que le calorimètre à Argon Liquide ne couvre pas les très bas angles. Cette couverture angulaire est assurée par un petit calorimètre "bouchon", le PLUG, qui couvre les angles polaires entre 0.7^o et 3.3^o. C'est un calorimètre à échantillonnage, constitué de plaques de cuivre et de plans de détecteurs au silicium. Sa résolution angulaire est de 4 mrad, mais sa résolution en énergie est médiocre : $\sigma_E/E = 150\%/\sqrt{E}$.

5.3.3 Le calorimètre arrière : SPACAL

Le calorimètre SPACAL ("Spaghetti Calorimeter") a été installé en 1995, il comporte une partie électromagnétique (SPACAL EM) et une partie hadronique (SPACAL HAD) ; sa couverture angulaire pour un vertex d'interaction nominal vérifie $153^o < \theta < 177.5^o$. De plus, ce calorimètre bénéficie d'une granularité relativement fine : il est constitué en effet de 1192 cellules électromagnétiques et de 136 cellules hadroniques. Le calorimètre SPACAL est composé de fibres scintillantes de diamètres 0.5 mm et 1 mm noyées dans des matrices en plomb séparées pour les sections hadroniques et électromagnétiques.

Elles sont lues par 1400 photomultiplicateurs capables de fonctionner dans un champ magnétique ambiant de 1 T. Avec cette configuration, le SPACAL est conçu pour disposer d'une bonne résolution en énergie, d'une résolution spatiale de l'ordre du millimètre et d'une résolution temporelle de l'ordre de $1ns$. Nous précisons l'ensemble de ces caractéristiques dans la suite de ce paragraphe, la disposition de ce nouveau calorimètre dans l'ensemble expérimental de H1 est montrée sur la fig. 5.9 ; la fig. 5.10 montre une vue $r - \phi$ du SPACAL.

Dans un pemier temps, nous énonçons les motivations physiques qui ont été à l'origine de la conception du SPACAL, nous montrons alors en quoi les caractéristiques techniques que nous venons d'évoquer sont importantes et bien adaptées pour l'étude de la diffusion profondément inélastique à bas x.

Ensuite nous approfondissons la description de la technologie de ce calorimètre et nous donnons les performances de ce dernier obtenues lors de tests préparatoires.

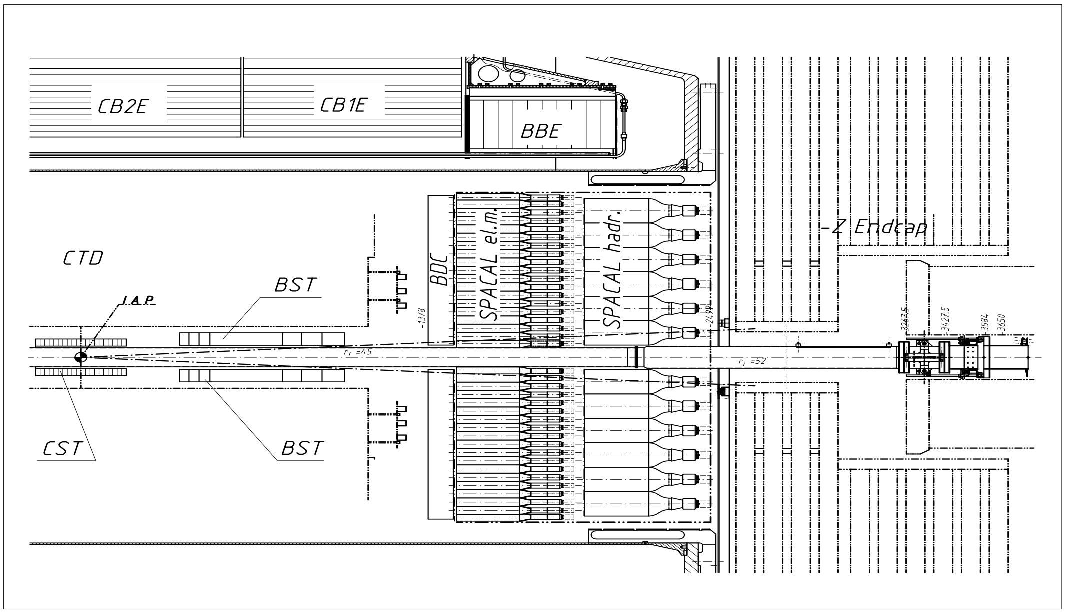


FIG. 5.9 – *Vue de la partie arrière du détecteur H1 montrant les deux parties du SPACAL (EM et HAD).*

Motivations physiques

L'étude de la diffusion profondément inélastique à bas x et moyen Q^2 nécessite de mesurer à la fois l'électron diffusé et l'état final hadronique vers l'arrière du détecteur H1, et de rejeter avec une bonne efficacité les événements de photoproduction et les événements de bruit de fond. Le SPACAL doit ainsi vérifier certaines propriétés :

- *Extension du domaine cinématique à bas x et bas-moyen Q^2 ($Q^2 \leq 10$ GeV ^{2})*: ceci est réalisé en étendant la couverture angulaire de la mesure des électrons pour $\theta \leq 177.8^o$.

- *Bonne résolution en θ_e et E_e* : à 30 GeV les résolution nominales, moyennant la granularité du calorimètre, sont : $\delta\theta_e \leq 1\ mrad$ et $\frac{\delta E_e}{E_e} \leq 2\%$.

- *Bonne identification de l'électron*: La probabilité d'identifier un pion comme étant un électron est de 1% à 5 GeV . Cette efficacité d'identification est nécessaire pour garantir une bonne suppression de la photoproduction.

- *Bonne couverture de l'énergie hadronique*: ceci est important pour analyser l'état final hadronique et pour mesurer y sans utiliser l'information sur l'électron. Un calorimètre à fine granularité est essentiel pour cette tâche.

- *Bonne résolution temporelle*: une résolution temporelle de moins de $1ns$ pour les électrons, les pions et les particules au minimum d'ionisation est nécessaire pour rejeter les événements de bruit de fond qui ne sont pas en temps (par exemple les interactions du faisceau de protons avec le gaz résiduel ou avec les parois du tube faisceau).

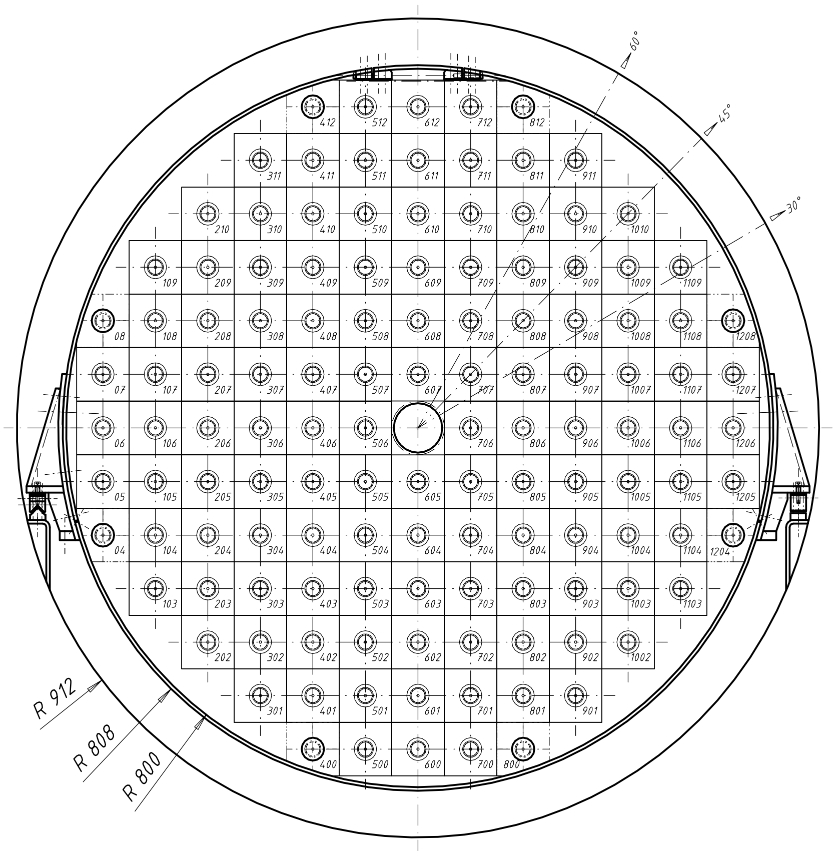


Fig. 5.10 – *Vue $r - \phi$ du SPACAL électromagnétique.*

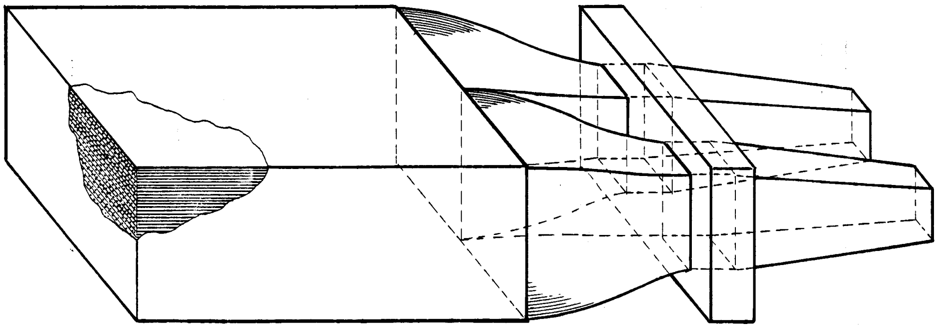


FIG. 5.11 – *Schéma d'un module du SPACAL*

Technologie

Les deux parties du SPACAL -électromagnétique et hadronique- utilisent la même technologie [4], [5]. Chaque cellule est composée de fibres optiques scintillantes de type BCF-12 (milieu actif) enrobées de plomb (absorbeur) [6]. Des plans de fibres sont intercalés avec des plaques de plomb de 1.9 mm rainurées de manière à accueillir les fibres et à assurer le contact entre deux plaques. Une cellule électromagnétique comprend ainsi 69 plaques de plomb. Les fibres sont collées au moyen d'une fine couche de colle acrylique. Elles sont disposées parallèlement à l'axe des faisceaux. A l'arrière de chaque cellule, les fibres sortantes sont noyées dans une colle epoxy noire qui donne de la rigidité à l'ensemble. Les cellules électromagnétiques (EM) sont ensuite assemblées par paire pour former un module (voir fig. 5.11) ; l'assemblage de huit de ces paires forme ce qu'on appelle un super-module. La partie hadronique (HAD) est usinée de façon similaire mais les cellules y sont assemblées individuellement et non par paire. Une fois séché, cet ensemble est usiné de manière à avoir une surface de sortie très plane. Ce procédé permet d'avoir un très bon contact optique entre les fibres et les photo-multiplicateurs (PMs) qui les suivent. Chaque photo-multiplicateur monté à l'arrière des modules est également équipé d'un préamplificateur et de circuits haute tension. Comme le champ magnétique est intense dans cette région, les PM utilisés ont une structure de dynodes non standard. La longueur totale d'une cellule est de 50 cm. Notons que la partie hadronique est installée derrière les PMs qui lisent les modules électromagnétiques.

Les cellules électromagnétiques sont moins denses (rapport volumique plomb/fibre = 2 : 1) et plus petites ($40.5 \times 40.5\ mm^2$) que les cellules hadroniques dont la taille est de $120 \times 120\ mm^2$ avec un rapport volumique plomb/fibre de 4 : 1. La table (5.1) donne les caractéristiques essentielles du SPACAL.

Notons également que le centre du SPACAL est constitué par un module spécial ("Insert") introduit pour combler l'intervalle entre le corps du calorimètre et le tube faisceau. Ce module est représentée sur la fig. 5.12; il est utilisé pour évaluer la quantité d'énergie diffusée dans le tube faisceau.

TAB. 5.1 – *Caractéristiques techniques du SPACAL*

	Section électromagnétique	Section hadronique
Diamètre des fibres	0.5 mm	1.0mm
Rapport volumique plomb/fibre	2 : 1	4 : 1
Nombre de canaux	1192	136
couverture angulaire	$153^o < \theta < 177.8^o$	$153^o < \theta < 178^o$
Taille des cellules	$40.5 \times 40.5\ mm^2$	$120 \times 120\ mm^2$
Longueur de radiation	0.91 cm	0.85 cm
Longueur d'interaction	25 cm	20 cm
Longueur active	25 cm	25 cm
Rayon de Molière	2.55 cm	2.45 cm
Longueur totale d'un module avec le PM	50 cm	50 cm

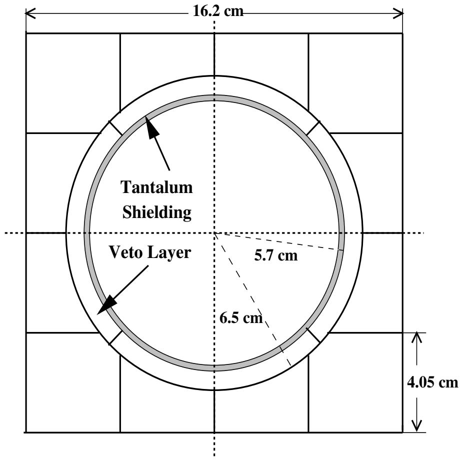


FIG. 5.12 – *Vue schématique de la géométrie du module "Insert" situé au centre du SPACAL EM. On note sur cette figure la présence d'une couche divisée en quatre parties : la couche véto ("Veto Layer") qui est un outil précieux pour estimer la quantité d'énergie diffusée dans le tube à vide.*

Performances techniques

Des prototypes des modules du calorimètre SPACAL ont été étudiés en 1994 au CERN (Genève) sur le "Proton Synchrotron" (PS) et sur le "Super Proton Synchrotron" (SPS), à DESY (Hambourg) et à ITEP -*Institute of Theoretical and Experimental Physics*- (Moscou).

- *Performance de la section électromagnétique du SPACAL (SPACAL EM)*: Les données du SPS et de DESY avec des faisceaux d'électrons de 2 GeV à 60 GeV ont été utilisées pour étudier la réponse en énergie des super-modules du SPACAL EM.

  La linéarité de la section électromagnétique (EM) a ainsi été déterminée par un ajustement linéaire de la réponse en énergie des super-modules pour des énergies de faisceau comprises entre 10 GeV et 60 GeV . La déviation maximale a été estimée à 1.3% ce qui correspond à la non-linéarité de l'électronique qui les compose.

Les données du SPS et de DESY ont ensuite été utilisées pour obtenir la résolution énergétique des super-modules EM : on considère la distribution en énergie pour des matrices 3×3 de cellules, ce qui permet de bien contenir la gerbe EM ; pour différentes énergies du faisceau d'électrons, un ajustement gaussien donne la valeur de l'énergie moyenne -délivrée par ces matrices 3×3 de cellules- ainsi que la résolution (largeur de la gaussienne). On déduit ainsi la fonction $\frac{\sigma_E}{E}(E_{faisceau})$: la fig. 5.13 représente cette fonction. Un ajustement de cette dernière par une fonction gaussienne de largeur variable :

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{a}{\sqrt{E}} \oplus \frac{b}{E} \oplus c \tag{5.1}$$

montre que :

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{(7.1 \pm 0.2)\%}{\sqrt{E}} \oplus (1.0 \pm 0.1)\% \tag{5.2}$$

Il en résulte que le terme de bruit b est négligeable et la résolution σ_E est par exemple de 2% à 30 GeV . De plus, on s'attend à ce que le terme constant c soit plus important si l'on considère l'ensemble du SPACAL à cause des inhomogénéités entre les différents super-modules et des frontières entre ces super-modules. Une simulation qui paramétrise les fluctuations du signal aux frontières montre que la valeur de c est effectivement plus importante :

$$c = 2.2\%$$

Une analyse complémentaire fournie par le PS du CERN pour des faisceaux d'électrons de 1 GeV à 7 GeV donne :

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{(7.6 \pm 0.2)\%}{\sqrt{E}} \oplus (1.2 \pm 0.3)\% \tag{5.3}$$

avec une linéarité de l'ordre de 1%, ce qui confirme les résultats précédents.

La résolution spatiale pour les gerbes EM a été mesurée en utilisant des électrons de 4 GeV au PS du CERN. Le point d'impact de la gerbe, $\bar{r}$, est reconstruit pour chaque coordonnée x, y par une méthode de repondération logarithmique :

$$\bar{r} = \frac{\sum_i w_i r_i}{\sum_i w_i} \tag{5.4}$$

où r_i est la coordonnée centrale de la cellule i et w_i est calculé comme suit :

$$w_i = max(0, w_0 + \ln(E_i / \sum_j E_j)) \tag{5.5}$$

Le paramètre w_0 contrôle les fluctuations dues aux queues de gerbes et sa valeur dépend de l'énergie, de la taille de la cellule et de l'angle d'impact. Comme la taille des cellules et l'angle d'impact sont fixés et que la dépendance en énergie est faible, la valeur de 4.3 pour w_0 à 4 GeV a été obtenue en optimisant la résolution spatiale ; cette valeur est utilisée ensuite pour toutes les énergies. La résolution est alors déterminée en comparant la position d'impact calculée

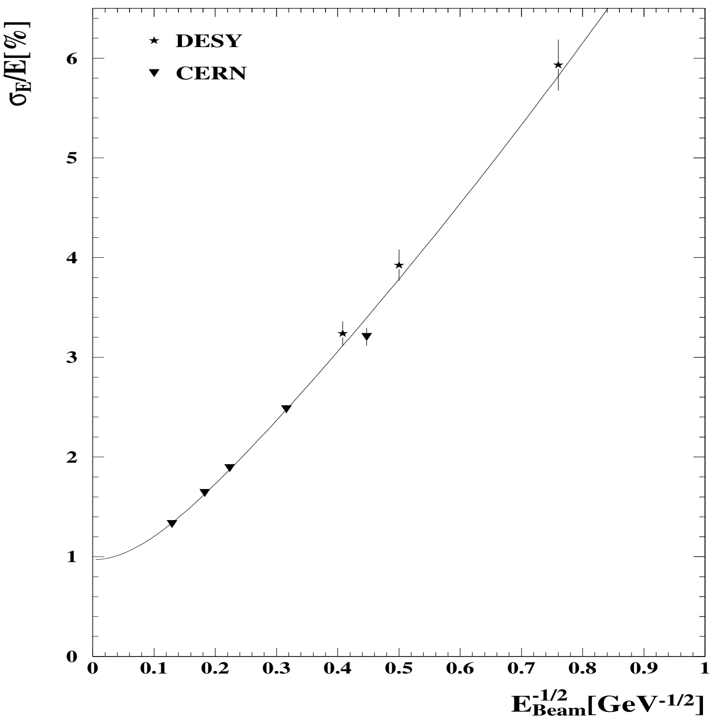


FIG. 5.13 – *Résolution énergétique de la partie EM du calorimètre SPACAL.*

avec l'extrapolation d'une trace mesurée dans une chambre à fils de référence située devant le calorimètre. Un ajustement gaussien de la différence des deux positions donne la résolution. La fig. 5.14 montre les résultats obtenus. On en déduit la résolution spatiale lorsque les points d'impact sont aux centres des cellules :

$$\sigma_x = \frac{(4.4 \pm 0.4)mm}{\sqrt{E}} + (1.0 \pm 0.2)mm \qquad (5.6)$$

et pour les points d'impact au bord des cellules :

$$\sigma_x = \frac{(3.8 \pm 0.4)mm}{\sqrt{E}} + (0.3 \pm 0.2)mm \qquad (5.7)$$

La différence entre ces deux égalités provient du fait que, quand le centre de la gerbe est à la frontière, l'énergie est mieux répartie entre les différentes cellules et le calcul du point d'impact est plus précis, par suite la résolution s'en trouve améliorée.

La résolution temporelle du SPACAL EM a été estimée auprès du SPS au CERN en comparant le temps de vol mesuré par le SPACAL EM avec celui donné par des scintillateurs en coincidence : on obtient :

$$\sigma_t = (0.38 \pm 0.03)ns \qquad (5.8)$$

Cet ordre de grandeur est très intéressant, il permet d'utiliser le SPACAL EM comme un détecteur de temps de vol, ce qui en fait un outil puissant pour la rejection du bruit de fond, nous revenons sur cette propriété dans la suite de cet exposé.

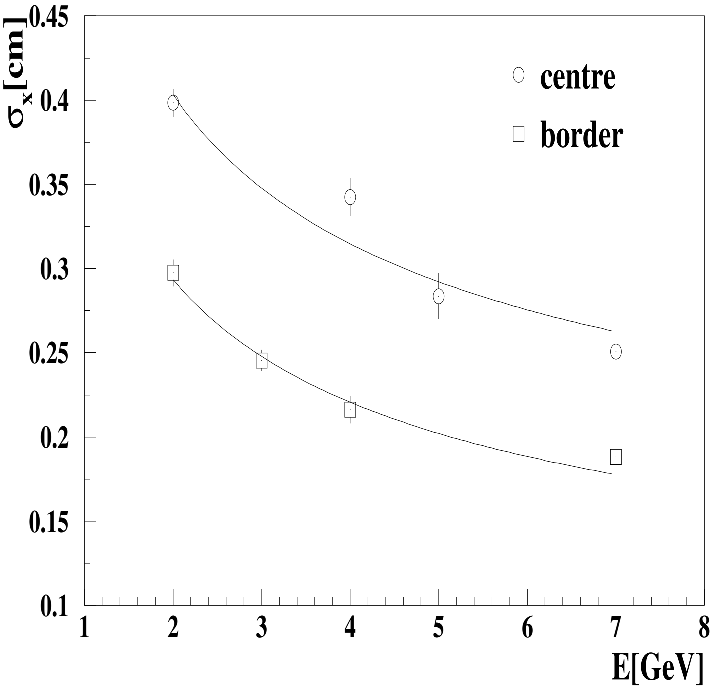


FIG. 5.14 – *Résolution spatiale de la partie EM du calorimètre SPACAL.*

La réponse du SPACAL EM à un faisceau de pions a également été étudiée au PS du CERN. Pour les pions interagissants sur une longueur d'interaction (λ_i), on trouve :

$$\frac{\sigma_\pi}{E} = \frac{(36 \pm 4)\%}{\sqrt{E}} \tag{5.9}$$

Notons que les profils des gerbes pour les faisceaux de pions et d'électrons donnent un bon estimateur pour séparer les deux types de particules, ces analyses ont montré que le rayon dans lequel 95% de l'énergie de la gerbe est contenue vaut $R_0 = (2.1 \pm 0.1)cm$ pour les électrons et $R_0 = (7.5 \pm 0.5)cm$ pour les pions.

- *Performance de la section hadronique du SPACAL (SPACAL HAD)*: cette section du SPACAL a été étudiée au PS du CERN et à ITEP par des méthodes similaires à celles déjà exposées pour le cas de la partie EM de SPACAL. Ces études ont montré que :

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{(12.5 \pm 3.0)\%}{\sqrt{E}} \oplus (3.8 \pm 2.2)\% \tag{5.10}$$

avec une linéarité de l'ordre de 5%. La résolution spatiale n'a pas été mesurée car ce n'est pas une information essentielle pour la partie hadronique du calorimètre SPACAL. On a également :

$$\sigma_t = (0.83 \pm 0.3)ns \tag{5.11}$$

$$\frac{\sigma_\pi}{E} = \frac{(39 \pm 4)\%}{\sqrt{E}} \tag{5.12}$$

- *Performance combinée*: Les performances des parties EM et HAD du SPACAL ont été utilisées en particulier pour dériver un critère de séparation des électrons et des pions. On définit l'estimateur :

  $$R_E = \frac{E_{em}}{E_{em} + E_{had}} \tag{5.13}$$

  On montre alors que pour des énergies dans SPACAL de 2 GeV à 7 GeV une coupure à $R_E = 0.95$ donne une efficacité de détection des électrons de 97% ; ainsi, l'efficacité de séparation électron-pion est très bonne malgré la relativement faible longueur des cellules ($l = 1.03\lambda_i$).

5.3.4 Le calorimètre de fin de gerbes (fer instrumenté)

Le fer instrumenté qui englobe la bobine supraconductrice assure le retour des lignes de champ magnétique. Il est instrumenté par des tubes à décharge ("streamer"), qui permettent de détecter le passage d'un muon et de mesurer les fins de gerbes hadroniques, qui n'auraient pas été complètement arrêtées par le calorimètre hadronique.

La structure du fer instrumenté est octogonale, chaque octant étant constitué de 10 plaques d'acier de 7.5 cm d'épaisseur, espacées de 2.5 ou 5 cm. La résolution en énergie du fer instrumenté est de l'ordre de $100\%/\sqrt{E}$.

5.4 Spectromètre à muons

Un spectromètre à muons (voir fig. 5.15), constitué d'un aimant toroïdal intercalé entre des plans de chambres à dérive, est situé dans la partie avant du détecteur. Il permet de mesurer des impulsions de muons entre 5 et 200 GeV, émis à un angle polaire $3^o \leq \theta \leq 17^o$.

5.5 Système de luminosité

Une détermination précise de la luminosité est nécessaire pour la mesure des sections efficaces des processus physiques. Nous allons montrer dans ce paragraphe comment la luminosité est mesurée. Cette mesure est assurée par deux détecteurs : "l'Electron Tagger" (ET) et le "Photon Detector" (PD).

La luminosité est mesurée à partir du processus de Bethe-Heitler $ep \to ep\gamma$, dont on connaît précisément la section efficace : $\sigma_{vis} = 28$ mb visible dans les détecteurs. Notons que des réactions de Bremsstrahlung entre les leptons incidents et des molécules de gaz résiduel $eA \to eA\gamma$ constituent un bruit de fond pour les événements Bethe-Heitler. La proportion de telles interactions de bruit de fond est évaluée grâce aux "paquets pilotes" (15 paquets de leptons n'ont pas de paquets de protons correspondants, et 6 paquets de protons n'ont pas de partenaire dans le faisceau de leptons).

Afin d'identifier des événements de Bethe-Heitler (ou de bruit de fond), on essaie de détecter l'électron final dans l'ET, le photon dans le PD, et on regarde les

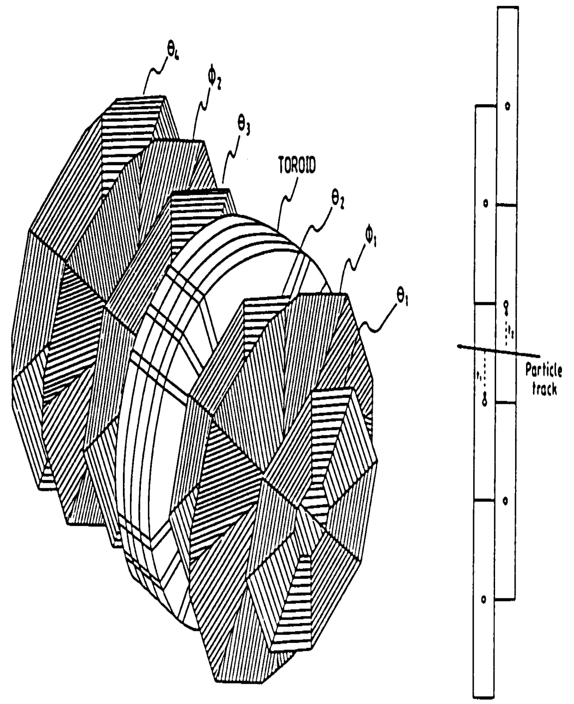


FIG. 5.15 – *Vue du spectromètre à muons montrant les six couches de chambres à dérive avec l'aimant toroïdal et la structure en cellules de chaque double-couche.*

coïncidences entre les deux. Dans de telles réactions, le lepton diffusé repart dans le tube à vide.

L'ET est placé très près du tube faisceau et loin du point d'interaction, à $z = -33.4$ m. Les électrons diffusés sont d'abord déviés par des aimants à -27.3 m, avant d'interagir avec l'ET. Quant aux photons, ils quittent le tube faisceau à $z = -92.3$ m et interagissent avec le PD situé à $z = -102.9$ m du point d'interaction. Les positions de l'électron tagger et du photon tagger sont indiquées sur la Fig. 5.16.

La luminosité peut alors être calculée comme suit :

$$L = \frac{R_{tot} - (I_{tot}/I_0)R_0}{\sigma_{vis}} \tag{5.14}$$

où R_{tot} est le taux total d'événements de Bremsstrahlung, R_0, le même taux dans les événements provenant des paquets pilotes, I_{tot} et I_0, les courants des faisceaux d'électrons correspondants.

L'ET est un détecteur Cerenkov de 15.4 cm × 15.4 cm de surface, constitué de 49 cellules, chacune étant lue par un photo-multiplicateur.

Le PD est aussi un détecteur Cerenkov, de surface 10 cm × 10 cm et composé de 25 cellules.

Notons par ailleurs que l'ET est aussi utilisé pour l'étude d'événements de photoproduction, où le lepton diffusé repart à un angle $\theta \simeq 180^o$, soit pour des valeurs de Q^2 inférieures à 0.01 GeV^2. Dans ce cas, on demande seulement de l'énergie dans le détecteur d'électrons au premier niveau de déclenchement, tandis que le détecteur de photons sert de veto.

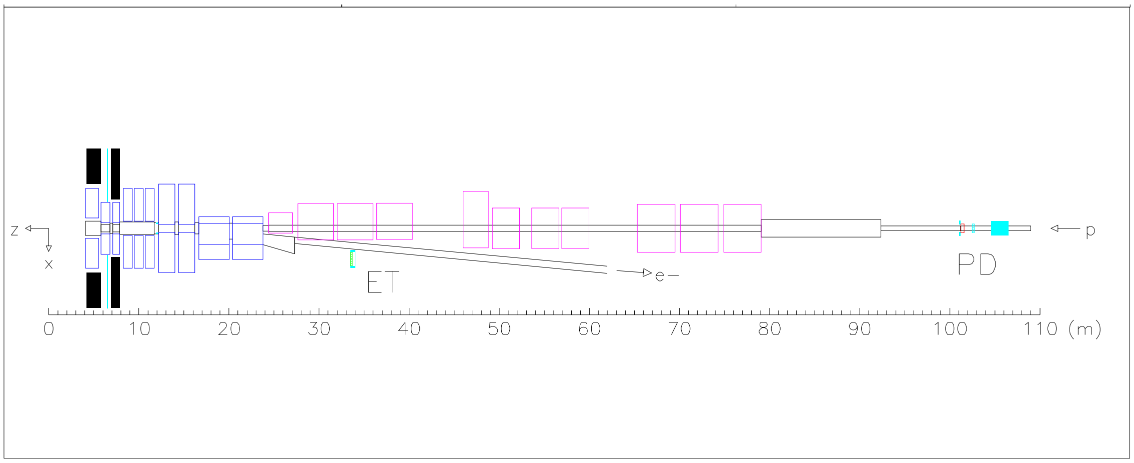


Fig. 5.16 – *Schéma du système de mesure de luminosité.*

5.6 Détecteurs très à l'avant

Certains détecteurs sont situés dans le tunnel d'accélération du faisceau de protons (très à l'avant de H1). Ils sont principalement utilisés pour la détection de l'état final hadronique et des restes du proton. On distingue : le "Proton Remnant Tagger" (PRT), le "Forward Proton Spectrometer" (FPS) et le "Forward Neutron Counter" (FNC).

- Le PRT entoure le tube faisceau à $z = 26m$; il est constitué de plans de scintillateurs intercalés entre des plans d'hodoscopes à fibres scintillantes, le signal étant envoyé à des photomultiplicateurs.

  Le PRT détecte les particules provenant de la fragmentation des restes du proton dans l'intervalle de rapidité $6 < \eta < 8$, c'est pourquoi il est particulièrement utile dans la sélection des événements diffractifs.

- Le FPS, partiellement installé en 1995, utilise les aimants de HERA près du point d'interaction comme spectromètre afin de mesurer l'impulsion de l'état final des protons. Deux stations à $z = 81m$ et $z = 90m$ sont équipées avec des hodoscopes à fibres scintillantes pour fournir des points espacés sur la trace du proton. Cette information peut être utilisée pour déterminer la courbure de la trajectoire du proton dans le champ magnétique des aimants de faisceau et donc son impulsion. Les hodoscopes sont montés sur des "pots romains" (amenés proches de la position des faisceaux), ce qui permet une rétraction pendant l'injection quand le bruit de fond est mauvais. Une résolution approximative de 4 GeV a été obtenu pour des protons de 650 GeV avec une incertitude sur l'échelle globale de 3%.

- Le FNC, spectromètre à neutrons vers l'avant, a été installé en aval du détecteur central de H1 ($z = +106\ m$ du point d'interaction nominal). Etant situé très près du tube faisceau de HERA, le FNC est soumis au rayonnement synchrotron ; pour limiter les perturbations provoquées par celui-ci, le FNC est protégé par une plaque de plomb de 9 mm d'épaisseur. Derrière cette plaque se trouvent deux murs de scintillateurs séparés par une couche d'air, ce système permet d'identifier efficacement les particules chargées qui traversent ce détecteur.

La partie active du FNC est ensuite constituée longitudinalement de 80 couches comprenant une plaque de plomb et d'une couche de scintillateurs d'épaisseur 14 mm et 2.6 mm respectivement, cet assemblage étant soutenu par une structure en acier.

5.7 Détecteurs de temps de vol

Il y a plusieurs systèmes dans le détecteur H1 qui rejettent le bruit de fond sur le critère du temps de vol ("Time of Flight"-TOF-) : en effet, le temps de vol des particules interagissantes qui arrivent aux différentes parties du détecteur diffère de celui des particules provenant du bruit de fond de faisceau dont l'occurence n'est pas liée avec le temps de croisement des faisceaux et qui sont donc souvent en dehors de la fenêtre temporelle définie par ce temps de croisement. Cette propriété donne une méthode puissante pour discriminer entre les événements physique "en temps" et les événements de bruit de fond "hors temps". Plusieurs détecteurs sont utilisés de la sorte :

- Le calorimètre SPACAL, avec une résolution temporelle de moins de $1ns$, est particulièrement bien adapté pour rejeter les événements "hors temps" qui y déposent de l'énergie.
- De plus, H1 est équipé d'un double mur de scintillateurs à l'arrière ($z = -6.5m$ et $z = -8.1m$) : le "Veto Wall". Ce système détecte les particules, essentiellement les muons qui sont engendrés par des collisions inélastiques de protons sur des molécules du gaz résiduel et les composants électroniques du système d'accélération. Ce sous-détecteur est également muni de photo-multiplicateurs rapides (temps de réponse de l'ordre de $1ns$), il peut ainsi servir de veto pour les événement "hors temps" qui y déposent de l'énergie.
- Les autres détecteurs de temps de vol utilisent des scintillateurs plastiques qui possèdent -intrinsèquement- une bonne résolution temporelle. On distingue le "Backward ToF" (BToF) monté à l'arrière, le "Plug ToF" (PToF) monté dans les intervalles non utilisés par l'absorbeur du calorimètre PLUG et le "Forward ToF" (FToF) monté à l'avant au niveau des spectromètres à muons.

5.8 Déclenchement et acquisition

Le taux de croisements délivré par HERA ($10.4MHz$ soit une collision toutes les $96ns$) est très élevé. L'objectif est alors de sélectionner les événements correspondant effectivement à une collision ep, tout en rejetant les événements de bruit de fond ; ces événements de bruit de fond sont dûs essentiellement soit à des radiations synchrotrons provenant du faisceau de leptons, soit à des interactions entre les protons incidents et des molécules du gaz résiduel dans le tube à vide, ou encore à des interactions entre des protons et le tube faisceau. A cette fin, le détecteur H1 est équipé

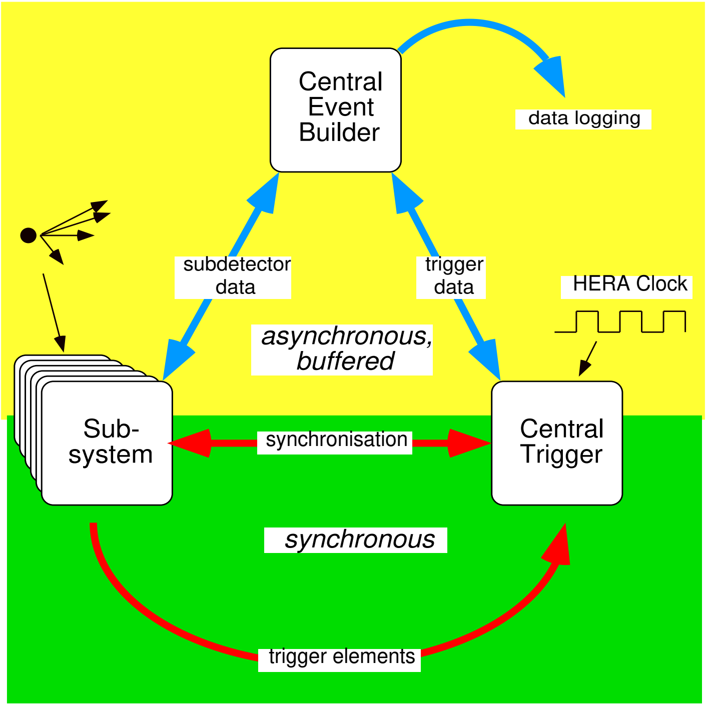


FIG. 5.17 – *Illustration des trois composantes du système de déclenchement et d'acquisition de H1, montrant les relations entre eux et le flot d'informations.*

d'un système de déclenchement ("trigger") qui traite les signaux des différents sous-détecteurs et qui prend une décision de sélection fondée sur ces informations [7], [8].

Le système de déclenchement a donc pour objectif de sélectionner les événements tout en minimisant le temps mort de l'expérience, qui est le temps suivant le déclenchement pendant lequel le sous-détecteur délivre son signal et reste donc insensible à tout nouvel événement.

Le système de déclenchement-acquisition de H1 est un système multi-niveaux où chaque niveau successif traite plus d'informations et prend plus de temps pour obtenir une décision -plus affinée- que le niveau qui le précède dans la chaine. La plupart des sous-détecteurs de H1 possède des processeurs de déclenchement qui génèrent des informations de déclenchement spécifiques. Ces informations sont ensuite coordonnées par le système de déclenchement logique central, le "Central Trigger Logic" (CTL), qui prend une décision en combinant "logiquement" les informations qui lui parviennent.

Le temps de croisement ($96ns$) est court comparé aux temps de réponse de nombreux sous-détecteurs, par exemple le temps de réponse d'une chambre à dérive est de l'ordre de $1\mu s$. Chaque sous-détecteur doit ainsi garder ses données dans des mémoires tampons ("pipelines") en synchronisation avec l'horloge de HERA (HCLK), ceci pour au moins 24 croisements de faisceaux consécutifs. A chaque croisement, les sous-systèmes de déclenchement envoient alors leurs informations sous la forme d'éléments de déclenchement ("trigger elements") au premier niveau du système de déclenchement central (CTL1) avec un délai correspondant environ à 22 croisements de faisceaux. Le CTL1 resynchronise les éléments de déclenchement relatifs à un même croisement et crée des combinaisons logiques entre eux, appelées sous-déclencheurs (“subtrigger elements”). Si une telle combinaison logique est satisfaite, alors un compteur est incrémenté. Des coefficients (“prescale values”) définissent le nombre de fois qu’un sous-déclencheur doit être activé et vérifié pour contribuer au niveau 1 de décision de déclenchement. Cette approche permet de contrôler le taux du CTL1, et d’éviter que certaines combinaisons logiques très fréquentes ne noient d’autres combinaisons plus rares. Un “OU” logique de tous les sous-déclencheurs est ensuite effectué pour engendrer le niveau 1 de décision (L1K, “L1 Keep”). Cette décision logique est ensuite rétro-envoyée aux différents sous-systèmes pour geler la mémoire tampon correspondant à cette décision, la lecture de cette dernière est alors initiée.

Le CTL1 est composé de 11 éléments de déclenchement, on distingue par exemple :

- *Le temps de vol (“Time of Flight” -ToF-)*: les détecteurs de temps de vol génèrent des éléments de déclenchement pour les événements “en temps”.
- *Z-vertex*: les informations des chambres proportionnelles (MWPCs) sont utilisées pour déterminer la position du vertex de l’événement à partir des traces dans la direction z.
- *Energie dans les calorimètres*: les signaux du calorimètre à Argon Liquide sont sommés par tours et sont comparés à certains seuils, les candidats électrons dans SPACAL sont traités de manière similaire.
- *Traces des muons*: les détecteurs de muons (comme le fer instrumenté) sont utilisés pour signer les muons diffusés.

Les combinaisons logiques réalisées avec ces 11 éléments représentent 128 sous-déclencheurs distincts. Notons que ces sous-déclencheurs peuvent correpondre à un type particulier de physique et que, par ailleurs, certains d’entre eux sont des sous-déclencheurs de contrôle, permettant de déterminer l’efficacité d’un sous-détecteur.Le temps de décision du CTL1 est de l’ordre de $2\mu s$.

Le niveau de déclenchement suivant (CTL2) est synchronisé avec le temps mort initial du CTL1. Ce système prend des décisions fondées sur des informations plus détaillées que celles traitées par CTL1 ; CTL2 a un temps de latence de $20\mu s$, pendant lequel deux mécanismes indépendants évaluent des corrélations complexes entre les différents signaux. Ce système utilise une technologie de réseaux neuronaux [9] et un tableau topologique [10], lesquels permettent un processus de décision sophistiqué. Ce niveau (CTL2), de même que CTL1, s’effectue en temps avec la prise de données. Les événements gardés sont alors transmis au système d’acquisition [11].

Ainsi, en partant d’un taux de bruit de fond de $10kHz$, le système de déclenchement réduit le taux d’événement à environ $50Hz$ avec un temps mort de 10%. Les événements qui passent les 2 niveaux de déclenchements (CTL1,CTL2) sont acquis en totalité, le temps mort total pour de tels événements est de $1ms$ à $2ms$. Les signaux des différents sous-détecteurs pour un tel événement sont placés dans un espace tampon, repéré par un numéro de référence commun. Un processeur dédié, le “Central Event Builder” (CEB), collecte alors les données de chaque système de manière asynchrone et reconstruit l’événement [12] ; les sous-systèmes communiquent avec le CEB via une fibre optique ($55 Mbytes/s$ avec un taux d'erreur maximal de transmission de 1 sur 10^{13}) : les relations entre le CTL et le CEB sont illustrées sur la fig. 5.17.

Une fois les événements reconstruits par le CEB, ils sont transmis au niveau 4 (L4) du système de déclenchement : L4 rejette la majorité des événements de bruit de fond qui restent, les événements cosmiques et ceux résultants du bruit du système de déclenchement lui-même. Les événements qui passent L4 sont écrits sur un disque avec un taux de $10 Hz$, à ce niveau un événement représente en moyenne $130 kBytes$. Une petite partie des événements ($\sim 1\%$) rejetés par L4 est également sauvée pour étudier les effets de ce niveau de déclenchement.

Les événements sont alors reconstruits avec un délai de quelques heures et étiquetés en différentes classes de physique : c'est le niveau L5 qui fournit les "Production Output Tapes" (POTs). A la fin de chaque année, les événements sont reprocessés à l'aide d'un logiciel de reconstruction et sont sauvés sur des bandes appelées DST ("Data Summary Tapes"), qui contiennent différents objets relatifs aux événements (amas d'énergie, traces,...). Les DSTs sont utilisées couramment pour les analyses de physique au sein de la collaboration H1.

5.9 Système de déclenchement du calorimètre SPACAL

Le système de déclenchement du SPACAL est traité par la logique de déclenchement du niveau 1 (CTL1) que nous venons d'expliciter ; ce sytème a deux fonctions essentielles :

- Déclencher pour les événements contenant un candidat électron dans ce calorimètre.

- Rejeter les événements de bruit de fond qui induisent un signal dans ce calorimètre.

La conception du SPACAL répond à cette double exigence via deux systèmes distincts :

- Un système de déclenchement inclusif d'électron, "Inclusive Electron Trigger" (IET) pour la partie EM du SPACAL.

- Un système de véto pour les événements qui ne sont pas en temps, "ATOF veto" soit "Anti-Time of Flight veto", avec, de plus, une mesure calorimétrique de l'énergie totale combinée aux logiques de déclenchement ToF/AToF ("Time of Flight/Anti-Time of Flight") : ce système existe pour les parties EM et HAD du SPACAL.

Nous décrivons dans ce qui suit ces deux types de sous-déclencheurs [13].

Le système de déclenchement IET

L'IET est conçu pour déclencher sur des candidats électrons dans SPACAL en comparant l'énergie déposée dans un groupe de cellules avec 3 seuils :

- T1 : $50 - 100$ MeV, pour les particules au seuil minimum d'ionisation.
- T2 : $3 - 5$ GeV, pour la physique à bas x.
- T3 : 15 GeV, pour la sélection des événements du pic cinématique servant à la calibration du SPACAL.

Les énergies déposées dans chaque groupe de 4 cellules contigües -matrice 2×2 de cellules- sont additionnées, chaque groupe ayant 2 cellules en commun avec le précédent ; ces énergies sont ensuite comparées aux seuils IET (T1,T2,T3), le signal de sortie de toutes les comparaisons étant synchronisé avec l'horloge de HERA (HCLK). Une carte électronique de déclenchement regroupe 16 de ces signaux de comparaisons, un "OU" logique est effectué entre eux pour produire un bit d'IET local ("Local-IET bit,LIET bit") pour chaque seuil.

Les bits LIET de toutes les cartes électroniques sont alors resynchronisés et un "OU" logique entre ces différents bits produit 3 bits d'IET global ("Global-IET, GIET") : chacun de ces 3 bits GIET correspond à un seuil T1,T2,T3 ; pour chaque seuil, le bit GIET correspondant traduit la présence d'un ou plusieurs amas d'énergie dans la partie EM du SPACAL avec une énergie supérieure au seuil. Ces bits GIET sont alors envoyés au système central CTL1.

Le système de déclenchement ToF/AToF

Ce système équipe distinctement les parties EM et HAD du SPACAL ; Le veto AToF est utilisé pour rejeter les événements de bruit de fond "hors temps" et la mesure des énergies totales EM ou HAD combinée avec la logique ToF/AToF génère des informations de déclenchement à partir de ces dernières.

Conclusions

La conception du SPACAL et les premiers résultats des tests préparatoires répondent parfaitement aux exigences qu'impose l'étude de la diffusion profondément inélastique à bas x et moyen Q^2, qui nécessite de mesurer à la fois l'électron diffusé et l'état final hadronique vers l'arrière du détecteur H1, et de rejeter avec une bonne efficacité les événements de photoproduction et les événements de bruit de fond :

- *Extension du domaine cinématique à bas x et bas-moyen Q^2* qui est réalisé par une couverture angulaire de la mesure des électrons pour $\theta \leq 177.8^o$ en mode d'interaction nominal : c'est-à-dire lorsque la position longitudinale moyenne des points d'interaction ep est située en $z = 0\ cm$, il est possible de modifier légèrement les conditions d'injection des faisceaux incidents pour déplacer cette position moyenne à $z = +70\ cm$, on parle alors de mode d'interaction décalé[2].

---

[2] En 1995, des périodes de données ont été enregistrées dans cette configuration (vertex décalé) ; une mesure de F_2 correspondant à une luminosité intégrée de $\mathcal{L} = 114\ nb^{-1}$ a alors été réalisée sur l'intervalle : $Q^2 \subset [0.35; 3.5]$ GeV ^{2} [14].

- *Bonne résolution en θ_e et E_e* qui est permise par la fine granularité du calorimètre et également pour la mesure angulaire par une correspondance entre l'amas EM et sa trace dans la BDC.

- *Bonne détection de l'électron* qui est réalisée en particulier par le système de déclenchement du SPACAL (voir plus haut).

- *Bonne couverture de l'énergie hadronique* qui est possible grâce à la fine granularité du SPACAL.

- *Bonne résolution temporelle* qui est la conséquence du système de mesure de temps de vol ($\sigma_t \leq 1\ ns$) et de déclenchement ToF/AToF.

Nous sommes donc en mesure de réaliser une analyse des événements de diffusion inélastique profonde fondée sur l'identification d'un candidat électron diffusé dans le SPACAL.

Bibliographie

[1] H1 Collaboration, I.Abt et al., *Nucl.Inst.Meth.* **A386** (1997) 310 ; H1 Collaboration, I.Abt et al., *Nucl.Inst.Meth.* **A386** (1997) 348.

[2] H1 Collaboration, *DESY PRC-93/02* (1993).

[3] B.Andrieu et al., *Nucl.Inst.Meth.* **A336** (1993) 460.

[4] R.D.Appuhn et al., *DESY-96/171* (1996).

[5] R.D.Appuhn et al., *DESY-96/013* (1996).

[6] A.Walther, R.Barschke, *Proceedings du "SCIFI-93 Worshop on Scintillating Fiber Detectors"* (1993) 253.

[7] E.Elsen, *Proceedings de l'" International Symposium on Electronics Instrumentation in Physics"* (1991).

[8] F.Sefkow et al., *Proceedings du "IEEE Nuclear Science Symposium* (1994).

[9] A.Gruber et al., *Proceedings du "IEEE Conference TAI94* (1994).

[10] L.Goerlich et al., *Note H1 H1-01/97-058* (1997).

[11] M.Turiot, C.Vallée, *Note H1 H1-09/94-382* (1994).

[12] W.Haynes, *Rapport RAL-90/039* (1990).

[13] V.Boudry et al., *Note H1 H1-03/95-430* (1995).

[14] H1 Collaboration, *DESY-97-024* (1997).

Chapitre 6

RECONSTRUCTION ET SELECTION DES EVENEMENTS

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps quelques éléments de description des différentes méthodes de reconstruction des variables cinématiques utilisées pour décrire les processus inclusifs en diffusion inélastique profonde. Dans un deuxième temps, nous montrons quel degré de précision nous avons obtenu pour cette reconstruction. Cette dernière partie est décomposée en plusieurs paragraphes, nous exposons ainsi :

♠ La calibration électromagnétique du SPACAL : nous explicitons la procédure de calibration que nous avons développée et l'incertitude sur la détermination de l'échelle absolue d'énergie que nous avons déduite après sa mise en oeuvre.

♠ La calibration hadronique du SPACAL : pour cette partie également nous mettons en évidence la valeur de l'incertitude sur la détermination de l'échelle globale d'énergie.

♠ La sélection des périodes de prise de données réalisées en 1995 en mode d'interaction nominal, ainsi que les sous-déclencheurs du SPACAL que nous avons utilisés ; ceci constitue le premier pas dans le sens d'une sélection des événements de diffusion inélastique profonde.

♠ La sélection des événements de diffusion inélastique profonde (avec un candidat électron dans SPACAL) que nous avons effectuée moyennant certains critères et le degré de précision que nous avons atteint dans l'estimation du bruit de fond de photoproduction qui contamine l'échantillon sélectionné.

♠ Les distributions des variables cinématiques sont finalement représentées.

A chaque étape, nous justifions les choix effectués, l'ensemble nous amenant à une bonne compréhension des sous-détecteurs utilisés (en particulier le SPACAL et la BDC).

6.1 Reconstruction des variables cinématiques

Nous avons montré au chapitre 2 que les réactions de diffusion profondément inélastique sont caractérisées univoquement par deux variables cinématiques invariantes de Lorentz pour ce qui concerne les mesures inclusives ; dans le cas d'une collision *électron-proton* d'énergie dans le centre de masse $\sqrt{s}$, nous avons défini les variables x,y,Q^2 dont on rappelle les expressions ci-dessous :

$$\begin{aligned}
Q^2 &= -q^2 = -(k-k')^2 \\
x &= \frac{Q^2}{2Pq} \\
y &= \frac{Pq}{Pk} \\
&= \frac{Q^2}{sx} \qquad (6.1)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité suppose que $m_e^2 + m_p^2 \ll 4E_eE_p$. Ces formules (6.1) font ainsi intervenir les quadrivecteurs de l'électron diffusé et de l'état final hadronique ; nous avons montré au chapitre précédent que le détecteur H1 est conçu pour mesurer aussi bien la partie électromagnétique que la partie hadronique de la diffusion *ep*, il est donc possible de reconstruire la cinématique en utilisant la mesure de l'électron diffusé [1], du système hadronique final ou d'une combinaison des deux. On décrit dans ce qui suit ces différentes possibilités.

Pour chaque méthode -électromagnétique, hadronique ou combinée- il est important de spécifier les incertitudes qu'elle implique. En effet, un événement ayant lieu en un point (x, Q^2) du plan cinématique peut être reconstruit en un point (x', Q'^2) moyennant les incertitudes liées à chaque méthode, ce qui provoque une migration des événements depuis les régions cinématiques à fort taux d'occurrence vers les régions à plus faible taux.

On imagine facilement que les différentes méthodes sont particulièrement précises dans des régions cinématiques différentes non disjointes, cette diversité est une richesse qui permet, quand elle est combinée convenablement, d'assurer une bonne reconstruction cinématique sur une région étendue du plan cinématique [1], [2] : c'est ce que nous allons expliciter maintenant.

- **La méthode électron** : On note E_e, E'_e et θ_e les énergies de l'électron incident, diffusé et l'angle de l'électron diffusé ; les formules (6.1) deviennent alors :

$$\begin{aligned}
y_e &= 1 - \frac{E'_e}{E_e}\sin^2\frac{\theta_e}{2} \\
Q_e^2 &= 4E_eE'_e\cos^2\frac{\theta_e}{2} \\
x_e &= \frac{Q_e^2}{sy_e} \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

avec :

$$\frac{dy_e}{y_e} = \sqrt{(\frac{1-y_e}{y_e})^2\left((\frac{dE'_e}{E'_e})^2 + (\frac{d\theta_e}{\tan\frac{\theta_e}{2}})^2\right)} \qquad (6.3)$$

---

[1] En 1995, HERA a produit des collisions *positon-proton* : le terme -électron- est utilisé de façon générique ; il s'agit en fait pour la prise de données de 1995 de positons. Les prédictions de la QCD perturbative faisant intervenir uniquement la charge au carré de ce dernier, positons ou électrons sont équivalents du point de vue des prédictions théoriques.

$$\frac{dQ_e^2}{Q_e^2} = \sqrt{\left((\frac{dE'_e}{E'_e})^2 + (d\theta_e \tan\frac{\theta_e}{2})^2\right)} \tag{6.4}$$

Cette méthode, utilisée par les expériences sur cibles fixes, a l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre et indépendante de toute hypothèse sur l'état final hadronique.

L'équation (6.4) nous montre que la résolution en Q_e^2 est très bonne sauf à grand θ_e et que la résolution sur y_e, bonne à grand y_e ($y_e > 0.2$), se détériore rapidement (en $1/y_e$) lorsque y_e décroit. Ces résultats peuvent être retrouvés en traçant les courbes isoangles et isoénergies dans un plan (x, Q^2) (voir fig. 6.1). Le diagramme 6.1 est en ($\log x$, $\log Q^2$) car les sections efficaces varient beaucoup moins dans le plan ($\log x$, $\log Q^2$) que dans le plan (x, Q^2) et nous pouvons analyser simplement les effets de résolution dans ce plan. On voit qu'une erreur de mesure sur θ_e ne sera importante pour la détermination de x et Q^2 que pour la région des petits Q^2 et des grands x (les courbes isoangles y sont le plus espacées) alors que, pour la plus grande partie du plan cinématique, mesurer θ_e revient à mesurer Q^2 : Q^2 sera donc bien mesuré pratiquement partout. Par contre, une faible erreur sur la mesure de l'énergie provoque, à bas y_e, donc à grande énergie ($E'_e > 27.6\ GeV$), une erreur importante sur la mesure de x, car les isoénergies y sont très espacées.

Notons également qu'à grand y_e, la méthode électron est particulièrement sensible à la contribution d'une radiation QED de l'électron incident, ce qui modifie la valeur de E_e dans le système (6.2), la valeur de l'énergie de l'électron incident au vertex d'interaction après émission d'un photon réel étant plus faible que la valeur de l'énergie du faisceau incident.

Il s'ensuit que, moyennant une bonne description des radiations QED, la méthode électron est bien adaptée pour la reconstruction de la cinématique à grand y (bas x) pour $Q^2 \geq 1$ GeV ^{2}.

- **La méthode Jacquet-Blondel**: Pour résoudre l'inefficacité de la méthode électron à bas y, il est possible d'utiliser le système hadronique seul pour déterminer la cinématique (6.1) [3], on pose:

$$\Sigma = \sum_h E_h - p_{z,h} \tag{6.5}$$

$$T = \sqrt{(\sum_h p_{x,h})^2 + (\sum_h p_{y,h})^2} \tag{6.6}$$

où la somme correspond à tout l'état final hadronique, on obtient alors:

$$\begin{aligned} y_{jb} &= \frac{\Sigma}{2E_e} \\ Q_{jb}^2 &= \frac{T^2}{1 - y_{jb}} \\ x_{jb} &= \frac{Q_{jb}^2}{s y_{jb}} \end{aligned} \tag{6.7}$$

avec :

$$\frac{dy_{jb}}{y_{jb}} = \frac{d\Sigma}{\Sigma} \tag{6.8}$$

L'expression (6.8) montre que la résolution à bas y_{jb} n'est plus divergente à bas y_{jb}, elle est donc certainement meilleure que dans le cas de la méthode électron ; cependant, la résolution $\frac{dy_{jb}}{y_{jb}}$ dépend directement de la résolution sur Σ et donc sur la mesure de l'échelle d'énergie hadronique : en particulier, cette résolution sera meilleure lorsque les hadrons sont diffusés dans le calorimètre à Argon Liquide que lorsqu'ils sont diffusés dans le calorimètre SPACAL (par exemple à grand y_{jb}) : nous revenons dans la suite sur cette propriété. De plus, la mesure de Q^2_{jb} est affectée par les pertes de hadrons dans le tube à vide, en particulier à bas Q^2_{jb}.

- Un bon compromis entre les deux méthodes précédentes est de reconstruire y -à bas y ($y \leq 0.2$)- avec la méthode hadronique et d'utiliser autrement la méthode électron pour déterminer y et Q^2 : Il s'agit de la *méthode mixte* qui a été utilisée lors de la première analyse de F_2 réalisée dans H1 [4].

- **La méthode sigma** : Une autre méthode est possible qui combine l'information électromagnétique et la mesure de l'état final hadronique, elle améliore la résolution à bas y (pour les mêmes raisons que la méthode Jacquet-Blondel) tout en réduisant la sensibilité aux radiations QED par l'électron incident à grand y.

  L'énergie de l'électron initial est remplacée dans cette méthode par une énergie reconstruite E_{rec} déterminée à partir de l'état final complet, nous pouvons en effet écrire en utilisant la conservation de l'énergie-impulsion :

$$2E_{rec} = \Sigma + E'_e(1 - \cos\theta_e) \tag{6.9}$$

  Alors :

$$y_\Sigma = \frac{\Sigma}{\Sigma + E'_e(1-\cos\theta_e)} \tag{6.10}$$

$$Q^2_\Sigma = \frac{E'^2_e \sin^2\theta_e}{1 - y_\Sigma} \tag{6.11}$$

$$x_\Sigma = \frac{Q^2_\Sigma}{s y_\Sigma} \tag{6.12}$$

  avec :

$$\frac{dy_\Sigma}{y_\Sigma} = \sqrt{(1-y_\Sigma)^2\left((\frac{d\Sigma}{\Sigma})^2 + (\frac{dE'_e}{E'_e})^2 + (\frac{d\theta_e}{\tan\frac{\theta_e}{2}})^2\right)} \tag{6.13}$$

  De même que, pour la méthode Jacquet-Blondel, la résolution à bas y_Σ est améliorée par rapport à la méthode électron ; de plus, à grand y_Σ, l'erreur sur y_Σ est réduite d'un facteur $(1 - y_\Sigma)$, quoique cette région cinématique reste dominée par les incertitudes expérimentales sur la mesure de Σ (échelle d'énergie hadronique).

  La méthode sigma est peu sensible aux radiations QED par l'électron incident car le photon ainsi émis est généralement perdu -pour la détection- dans le tube faisceau et il n'entre donc pas dans le calcul de la cinématique (6.12) ; E_{rec} est ainsi plus proche de la "vraie" valeur de l'énergie de l'électron initial qui interagit avec le proton et la cinématique (6.12) correspond mieux à la "vraie" cinématique, à la différence de la méthode électron où une radiation initiale affecte de façon importante la cinématique (voir fig. 6.2). Notons que, pour cette méthode, x_Σ peut être calculé de deux façons différentes puisque l'énergie dans le centre de masse (s) peut être exprimée en fonction de E_e ou de E_{rec}, nous choisissons : $s = 4E_{rec}E_p$.

Dans l'analyse que nous proposons dans la suite nous utilisons les méthodes électron et sigma. Pour la détermination de y_Σ, lorsque l'énergie hadronique est déposée dans le calorimètre à Argon Liquide, nous avons utilisé une combinaison des traces centrales et des cellules calorimétriques, l'impulsion mesurée à partir des traces contribuant au calcul si l'impulsion transverse de la trace est plus faible que 300 MeV [5] ; un cône d'isolation est utilisé dans ce cas pour éviter les doubles comptage avec les dépôts d'énergie dans les cellules provenant de la trace déjà prise en compte. Lorsque l'énergie hadronique est déposée dans SPACAL, elle est déterminée comme la somme des énergies des différentes cellules qui composent l'état final hadronique dans SPACAL.

Les systèmes d'équations (6.2) et (6.12) pour les méthodes de reconstruction cinématique électron et sigma dépendent explicitement de trois variables : E'_e,θ_e et $\Sigma = \sum_h E_h - p_{z,h}$. Nous allons discuter pour chacune de ces trois quantités les méthodes possibles de reconstruction et les résolutions que nous avons obtenues.

Cette étude nécessite une bonne connaissance de la réponse des différents sous-détecteurs (SPACAL, BDC, calorimètre à Argon Liquide,...) ; par exemple, la calibration du SPACAL est un prérequis important car seule cette procédure peut fixer convenablement l'échelle d'énergie (pour la partie EM et HAD) et garantir en particulier que les variables (E'_e) ou ($E_{h\subset SPACAL} - p_{z,h\subset SPACAL}$) sont bien reconstruites.

Cette étude repose pour une large part sur la comparaison des données expérimentales et des simulations de type Monte-Carlo (MC) : nous allons ainsi dans un premier temps exposer brièvement les simulations que nous considérons pour l'analyse qui suit.

6.2 Simulation des détecteurs et des événements

Les propriétés des mesures expérimentales résultent de la convolution des caractéristiques des événements et des résolutions intrinsèques des détecteurs.

En conséquence, les calculs de type Monte-Carlo (MC) sont divisés en deux parties :

- Les caractéristiques physiques des événements sont simulées à un niveau générateur moyennant un certain modèle théorique. Ce générateur fournit ainsi les quadri-vecteurs et les propriétés de toutes les particules stables de l'état final.
- Ensuite, les événements engendrés sont traités par un programme de simulation du détecteur H1, H1SIM [6] fondé sur GEANT [7].

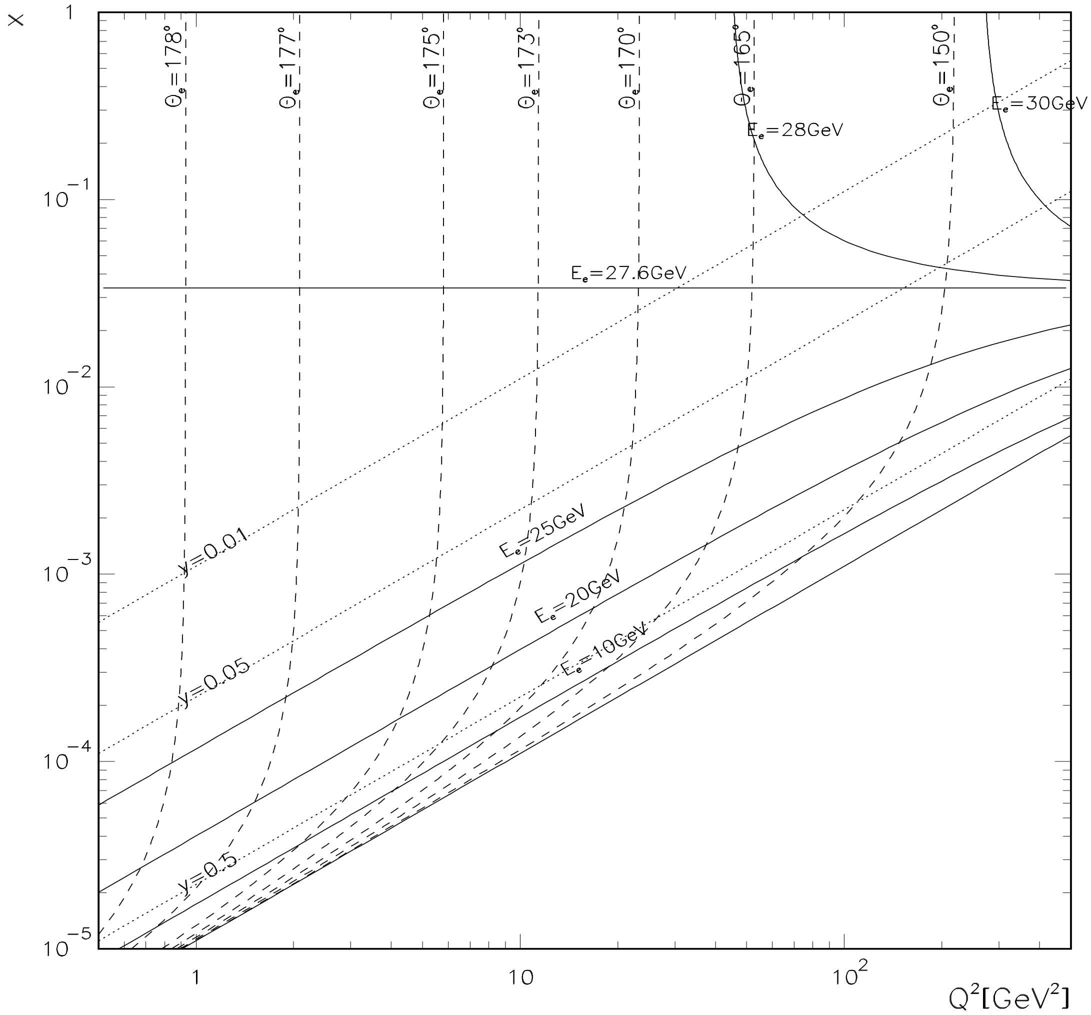


FIG. 6.1 – *Plan cinématique* $(\log x, \log Q^2)$ *; les courbes isoénergies autour de l'énergie nominale du faisceau d'électron (27.6 GeV) sont représentées ainsi que quelques courbes isoangles caractéristiques de la région angulaire d'acceptance géométrique du SPACAL.*

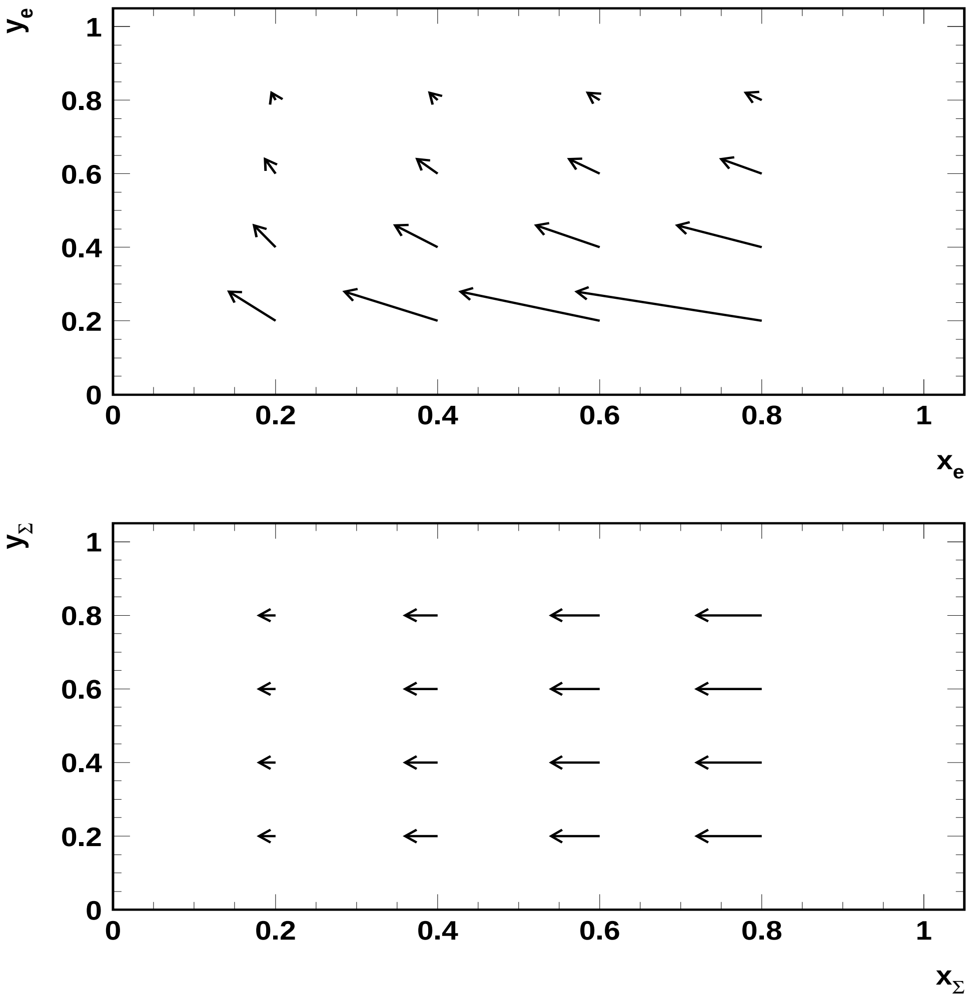


FIG. 6.2 – *Influence d'une radiation QED initiale sur la reconstruction des variables cinématiques x et y, pour les méthodes électron et sigma. Le point de départ de chaque flèche indique les valeurs vraies de x et y, le point d'arrivée indique les valeurs reconstruites en supposant que le photon émis emporte* 10% *de l'impulsion du lepton initial.*

La réponse de chaque sous-détecteur est évaluée en prenant en compte sa géométrie et sa résolution ; c'est pourquoi, une description correcte de cette réponse repose sur une bonne connaissance de la partie active de chacun de ces sous-détecteurs ; une bonne maîtrise des effets dûs aux matériaux morts (ou passifs) est également importante pour s'assurer que la simulation donne des résultats corrects : par exemple, une interaction des faisceaux incidents avec des matériaux morts (comme les cables) peut modifier considérablement le processus d'interaction canonique ; une prise en compte incorrecte de tels effets peut, en retour, fausser notre compréhension des détecteurs.

Les événements simulés sont alors reconstruits de la même façon que les données expérimentales.

Notre analyse utilise ainsi deux "générateurs" spécifiques : DJANGO [8] pour la description des événements de diffusion inélastique profonde (DIP) et PHOJET [9] pour la description des événements de photoproduction ; ces derniers constituent pour la mesure de F_2 la principale source de bruit de fond. Il est donc important d'estimer correctement leur contribution.

- Le générateur **DJANGO** repose sur les programmes HERACLES [10] et LEPTO [11].

  HERACLES simule les processus électrofaibles en prenant en compte les corrections radiatives leptoniques et quarkoniques à l'ordre $\mathcal{O}(\alpha)$, ainsi que les corrections à une boucle. La dépendance en x et Q^2 de la section efficace engendrée peut être choisie en utilisant les paramétrisations des densités de partons de la PDFLIB [12]. Nous avons utilisé la paramétrisation GRV [13].

  LEPTO décrit la fragmentation du quark diffusé ; dans cette analyse, le "Modèle des Dipoles de Couleur" implémenté dans ARIADNE [14] a été utilisé parce qu'il reproduit bien les mesures de l'état final hadronique [15]. L'hadronisation est calculée à partir du modèle des cordes de Lund implémenté dans JETSET [16].

- Le générateur **PHOJET** simule toutes les composantes de la section efficace totale de photoproduction, en incorporant les processus perturbatifs et non-perturbatifs. Les premiers sont évalués à l'aide de la QCD perturbative à l'approximation LL(Q^2) alors que les derniers sont modélisés en utilisant la phénoménologie de Regge.

  L'hadronisation est assurée par le modèle des cordes de Lund implémenté dans JETSET et le flux de photons quasi-réels est engendré par le programme IJRAY [17].

Les fichiers DJANGO et PHOJET que nous utilisons correspondent à des luminosités intégrées de $\mathcal{L}_{DJANGO} = 289.9\ nb^{-1}$ et $\mathcal{L}_{PHO} = 125.3\ nb^{-1}$ respectivement ; nous montrons dans la suite que les périodes de données enregistrées en 1995 en mode d'interaction nominal présentent une luminosité intégrée de $\mathcal{L}_{Exp} = 619.9\ nb^{-1}$. Toutes les distributions de comparaisons données/MC que nous exposons par la suite pour présenter notre analyse sont normalisées à la luminosité des données ;

ainsi, pour la distribution d'une variable quelconque, les nombres d'événements que nous considérons sont les suivants :

- N_{Exp} pour les données, de façon générale dans la suite nous indiçons par Exp les variables relatives aux données.
- $N_{DJANGO} \frac{\mathcal{L}_{Exp}}{\mathcal{L}_{DJANGO}}$ pour le MC DJANGO ;
- $N_{PHO} \frac{\mathcal{L}_{Exp}}{\mathcal{L}_{PHO}}$ pour le MC PHOJET.

6.3 Calibration électromagnétique du calorimètre SPACAL

La discussion précédente nous a montré qu'une connaissance précise de l'énergie de l'électron diffusé E'_e est indispensable pour obtenir une reconstruction précise des variables cinématiques et donc des mesures inclusives consécutives : les systèmes d'équations (6.2) et (6.12) pour les méthodes électron et sigma contiennent en effet explicitement une dépendance en E'_e. Notons que ces systèmes dépendent également, comme nous l'avons indiqué, des variables θ_e et $\Sigma = \sum_h (E_h - p_{z,h})$, nous y revenons dans la suite.

C'est pourquoi, un effort important a été fait dans le sens d'une calibration électromagnétique (EM) précise du SPACAL (de l'ordre de 1%), c'est-à-dire une calibration de la réponse du SPACAL pour les gerbes EM : nous présentons dans ce paragraphe notre contribution à ce sujet.

Dans le chapitre précédent nous avons montré que les tests préparatoires ont donné des informations sur les performances techniques de ce calorimètre, lesquelles ont servi à la simulation MC de ce détecteur. Il s'agissait de la première étape de calibration. Lors de la prise de données de 1995, une deuxième étape devait être franchie selon le protocole suivant :

- Les hautes-tensions des 1400 photo-multiplicateurs (PMs) du SPACAL ont été ajustées pour homogénéiser les gains des différentes cellules avec une erreur estimée à 15%.

- Un système de LEDs a été installé pour contrôler et ajuster plus précisément le gain des PMs en évitant les variations systématiques dues par exemple à la température et à l'usure. Ce système produit une calibration électronique des gains des PMs.

- Des méthodes de calibration ont finalement été développées et appliquées pour ajuster sur les données reconstruites (au niveau L5) les résultats des procédés électroniques ci-dessus afin de déterminer avec précision l'inter-calibration de la réponse des cellules du SPACAL ainsi que l'échelle absolue d'énergie. L'intercalibration est nécessaire pour obtenir une réponse homogène du détecteur et une résolution optimale, la calibration absolue est importante pour garder une cohérence entre les différentes méthodes de reconstruction cinématique, l'objectif étant de maximiser l'espace des phases accessible par une combinaison des différentes méthodes (électron et sigma).

6.3.1 Calibration par la méthode du "pic cinématique"

Introduction

L'électron diffusé dans l'acceptance géométrique du SPACAL ($\theta \subset [153^o, 177.8^o]$) produit une gerbe électromagnétique dans le calorimètre et dépose généralement de l'énergie dans une dizaine de cellules ; rappelons que l'énergie de l'amas électromagnétique qui en résulte est alors déterminée en additionnant les énergies des différentes cellules qui le composent.

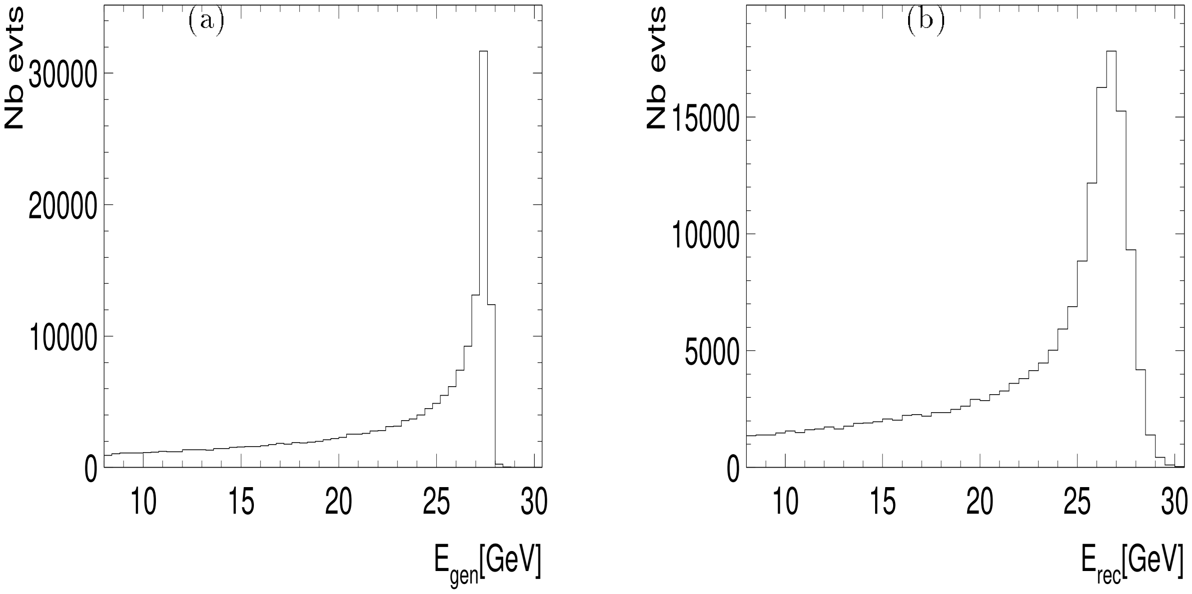


FIG. 6.3 – *Distributions en énergie générée (a) et reconstruite (b).*

Ces cellules appartiennent essentiellement à la partie EM du calorimètre SPACAL, c'est ainsi que la procédure de calibration que nous décrivons dans ce paragraphe concerne uniquement l'étalonnage EM du SPACAL (EM) ; la réponse hadronique du SPACAL (EM et HAD) est étudiée dans la suite de ce chapitre.

La procédure de calibration consiste à résoudre le système linéaire d'équations :

$$E_i = \sum_{j=1}^{n_i} c_j e_j \quad \forall i \tag{6.14}$$

où e_j représente l'énergie déposée dans une cellule par l'amas électromagnétique i qui comprend n_i cellules ; les termes c_j sont les constantes de calibration à déduire par inversion de ce système [18].

La procédure de calibration doit de plus rester assez indépendante des effets liés par exemple aux valeurs précises des fonctions de structure, c'est pourquoi les événements du pic cinématique (électrons diffusés de grande énergie) sont bien adaptés pour se faire en donnant une échelle d'énergie dépendant essentiellement de la cinématique de l'événement et non des processus physiques intrinsèques à ce dernier. De plus, la largeur de la distribution en énergie reconstruite du pic cinématique provient essentiellement de la résolution du calorimètre. En effet, le comportement de cette distribution à grande énergie ($E'_e \geq 27.6$ GeV) résulte typiquement d'un produit de convolution d'une fonction très rapidement décroissante pour $E'_e \geq 27.6$ GeV [2] et d'une gaussienne dont la largeur représente la résolution du détecteur : la fig. 6.3

---

[2] La fig. 6.1 montre que les iso-énergies sont très espacées pour les valeurs telles que $E'_e \geq 27.6$ GeV , ce qui provoque une décroissance très rapide de l'énergie générée pour $E'_e \geq 27.6$ GeV (voir également fig. 6.3)

illustre cette propriété, on remarque en effet que la distribution en énergie générée -très rapidement décroissante à grande énergie (fig. 6.3(a))- donne la distribution reconstruite représentée sur la fig. 6.3(b) lorsqu'elle est convoluée par une gaussienne.

Notons également que des pertes d'énergie dans les matériaux morts provoquent un petit décalage ou un élargissement du pic cinématique vers les basses énergies.

Les simulations MC sont alors utilisées pour prédire la position et la forme exacte du pic cinématique, c'est-à-dire qu'elles servent de référence pour ajuster l'échelle d'énergie pour les données, l'échelle expérimentale ajustée est alors qualifiée d'absolue. La procédure de calibration repose ainsi sur des comparaisons MC/données qui s'organisent comme suit :

- Dans un premier temps, les facteurs de correction sont appliqués aux données pour que le pic cinématique mesuré reproduise fidèlement la prédiction du MC.
- Dans un deuxième temps, une fois atteint un niveau de précision satisfaisant, des effets liés aux fonctions de structure et à la résolution du détecteur doivent être ajustés dans le MC pour reproduire les comportements expérimentaux.
- C'est ainsi que la procédure de calibration implique une analyse itérative où les distributions comparées entre les données et le MC sont ajustées successivement jusqu'à obtenir la meilleure convergence possible.

Procédure de calibration

Dans ce cadre, la procédure que nous adoptons pour résoudre le système

$$E_i = \sum_{j=1}^{n_i} c_j e_j \quad \forall i \tag{6.15}$$

est la suivante :

- Nous demandons que les 2/3 de l'énergie de l'amas électromagnétique soient déposés dans une seule cellule (dite la cellule la plus chaude).
- La constante de calibration c_i de cette cellule est calculée comme suit :

  $$c_i = \frac{< E_i^{MC} >}{< E_i^{Exp} >} \tag{6.16}$$

  où $< E_i >$ représente la moyenne d'une gaussienne (en fait une demi-gaussienne) ajustée sur la partie haute-énergie ($E_i \geq 26$ GeV) de la distribution E_i.

Notons également que, pour cette étude, les électrons du pic cinématique -diffusés dans SPACAL EM- sont sélectionnés avec une énergie plus grande que 20 GeV ; pour ces derniers, le bruit de fond aux processus de diffusion inélastique profonde (DIP) provient essentiellement des interactions du faisceau de protons avec les atomes du gaz résiduel : cette contamination est éliminée efficacement avec les coupures suivantes :

- La taille transverse de l'amas électromagnétique sélectionné est limitée à $3.5 cm$, soit :

  $$R_{amas} = \frac{1}{E_i} \sum_{j=1}^{n_i} e_j \sqrt{(x_j - X_i)^2 + (y_j - Y_i)^2} \tag{6.17}$$

$$R_{amas} \leq 3.5\ cm \tag{6.18}$$

- L'énergie dans chaque cellule doit également être plus grande que 100 MeV

La distribution en énergie du pic cinématique dans les données est alors similaire à celle représentée sur la fig 6.3(b).

Moyennant cette sélection DIP, le traitement que nous proposons est légitime car la cellule la plus chaude contient la plus grande partie de l'énergie de l'amas électromagnétique (les 2/3), ainsi le système

$$E_i = \sum_{j=1}^{n_i} c_j e_j \quad \forall i \tag{6.19}$$

s'inverse en première approximation comme suit :

$$c_i = \frac{< E_i^{MC} >}{< E_i^{Exp} >} \quad \forall i \tag{6.20}$$

Il reste cependant qu'une mauvaise calibration des cellules entourant la cellule la plus chaude peut fausser cette détermination, cet effet est réduit en itérant la procédure ci-dessus jusqu'à ce que la convergence soit obtenue, c'est-à-dire que les constantes de calibration déterminées à la n-ième itération doivent être pratiquement égales à celles déduites de la (n-1)-ième itération.

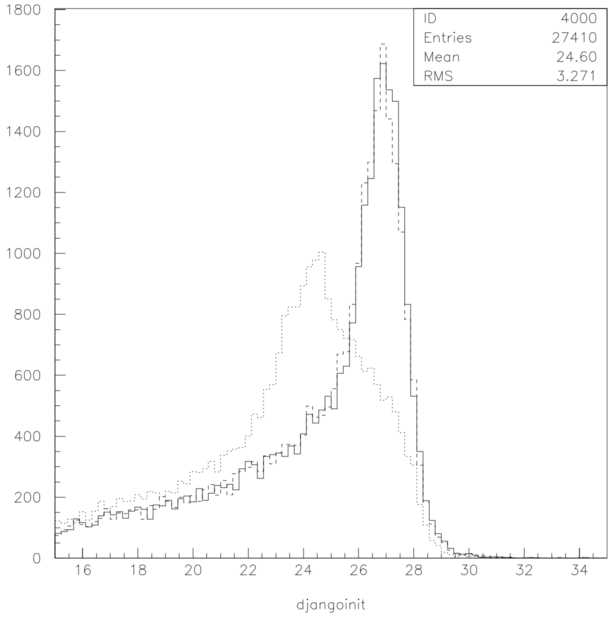


FIG. 6.4 – *Illustration du fonctionnement de la procédure de calibration cellule par cellule que nous avons développée (voir texte). La distribution en trait plein est décalibrée aléatoirement pour donner la distribution en trait pointillé fin, cette dernière est ensuite recalibrée : nous obtenons alors le spectre en trait discontinu.*

Une simulation MC -avec le programme DJANGO- nous a permis de vérifier la qualité de cette technique : sur la fig. 6.4 on représente ainsi le résultat d'une recalibration après une décalibration aléatoire du pic cinématique initial (nous avons modifié aléatoirement les constantes de calibration des 100 premières cellules du SPACAL EM, soit $c_i^{(0)} \rightarrow c_i^{(1)}$) ; la convergence est obtenue après deux itérations, l'énergie recalibrée reproduit alors bien la distribution initiale. Par application de la procédure de recalibration, nous avons pu déterminer des constantes de calibration $c_i^{(2)}$ à comparer aux termes $c_i^{(0)}$; nous avons obtenu :

$$c_i^{(2)} = c_i^{(0)}(1 \pm 1\%) \quad \forall i \subset [1, 100] \tag{6.21}$$

La technique que nous avons mise en oeuvre est donc efficace -dans son principe- pour déduire un premier jeu de facteurs d'inter-calibration pour les cellules du SPACAL EM, c'est ce que nous décrivons dans le paragraphe suivant. Nous discutons ensuite les limitations de cette méthode et les solutions que nous adoptons pour progresser vers une détermination précise ($\sim$ 1%) de l'échelle absolue d'énergie de ce calorimètre.

Applications

- Cette méthode nous a servi dans un premier temps à vérifier l'efficacité du système de calibration produit électroniquement par les LEDs. Avant leur mise au point, nous avons en effet observé la dépendance en temps des facteurs de calibration illustrée sur la fig. 6.5(a). Cette variation des facteurs de calibration était importante à grand angle (où l'électron diffusé est peu dévié), ce qui est justement la région angulaire intéressante pour notre analyse ($\theta \subset [165^o, 178^o]$). L'ajustement du système de LEDs a corrigé complètement cet effet qui était dû essentiellement à une dérive dans le temps du gain des PMs [19].

- Cette correction effectuée, nous avons déterminé un premier jeu de facteurs de calibration pour les 150 premières cellules dans le SPACAL EM (soit $R_{SPACAL} \leq 24cm$), la faible statistique à plus grand rayon ($R_{SPACAL} \geq 24cm$) est rédhibitoire pour appliquer cette méthode de calibration cellules par cellules : rappelons en effet que la section efficace DIP varie comme $1/R^4$.

  Le résultat obtenu pour la distribution en énergie du pic cinématique calibré est représenté sur la fig. 6.5(b). Un ajustement de la partie haute énergie de cette distribution par une fonction gaussienne de largeur variable (voir fig. 6.5(b)) :

  $$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{a}{\sqrt{E}} \oplus \frac{b}{E} \oplus c \tag{6.22}$$

  a montré que :

  $$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{(7.8 \pm 0.3)\%}{\sqrt{E}} \oplus \frac{(3 \pm 3)\ \text{MeV}}{E} \oplus (0.8 \pm 0.3) \tag{6.23}$$

  à comparer avec le résultat déduit des analyses en faisceau test (chapitre 5) :

  $$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{(7.6 \pm 0.2)\%}{\sqrt{E}} \oplus (1.2 \pm 0.3)\% \tag{6.24}$$

  Les deux résultats sont donc compatibles.

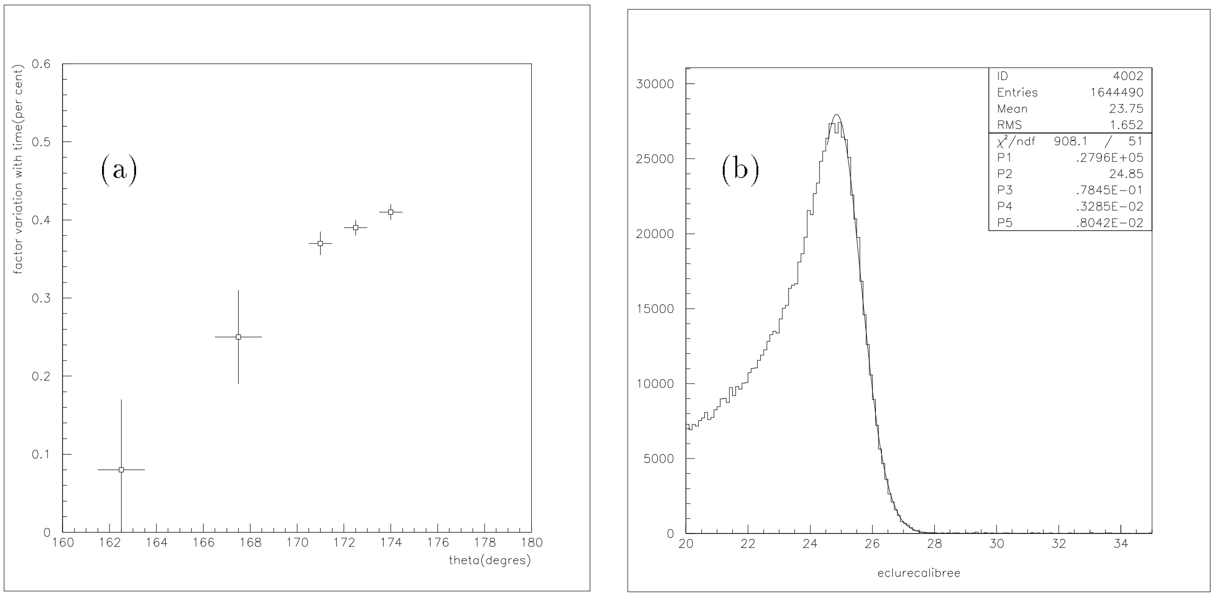


FIG. 6.5 – *En (a) nous représentons la variation dans le temps (trois semaines) des valeurs des constantes de calibration (en fonction de l'angle de l'électron diffusé) avant la mise au point du système de calibration électronique du gain des PMs par le système des LEDs. Nous avons déduit cette variation par application de notre procédure de calibration, cet effet a ensuite été corrigé complètement par l'ajustement du système des LEDs. En (b) nous représentons le spectre en énergie recalibrée ainsi que la résolution en énergie que nous en avons dérivée (voir texte).*

La méthode précédente permet donc d'ajuster l'échelle d'énergie dans les données par rapport au MC à hauteur de quelques %, il est difficile d'obtenir ainsi une calibration de meilleure qualité : en effet, la procédure en question est limitée car la détermination des constantes c_i via la formule :

$$c_i = \frac{< E_i^{MC} >}{< E_i^{Exp} >} \ \ \forall i$$

nécessite de réaliser des ajustements gaussiens de la partie haute-énergie du spectre du pic cinématique, la difficulté étant que ce spectre n'est pas réellement monochromatique (ou monocinétique) : c'est-à-dire que les électrons diffusés appartenant au pic cinématique correspondent à différentes énergies. L'approximation qui consiste à décrire ce spectre -à grande énergie- par une gaussienne (ou une demi-gaussienne) de largeur fixe - correspondant à une seule valeur de l'énergie- n'est donc plus tenable si l'on veut atteindre un grand niveau de précision.

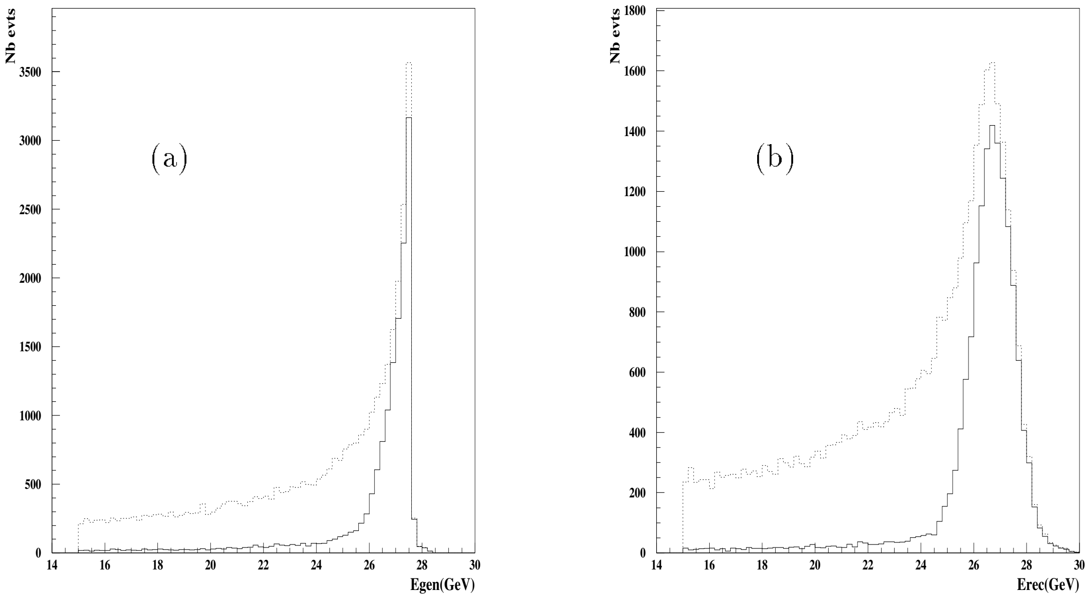


FIG. 6.6 – *Cette figure illustre l'effet de la coupure* $y_{jb} \leq 0.05$ *sur les spectres en énergie générée (a) et reconstruite (b). Les distributions avant coupure sont tracées en trait pointillé et après coupure en trait plein. On note la forme gaussienne de la distribution en énergie reconstruite (b).*

6.3.2 Calibration par la méthode du "pic cinématique monochromatique"

Introduction

La fig. 6.6 donne l'idée de ce qu'il convient de faire pour améliorer la procédure ci-dessus en sélectionnant essentiellement des électrons de même énergie (énergie du faisceau incident), ce qui rend le pic cinématique monochromatique (ou monocinétique) : il s'agit de garder les événements qui vérifient $y_{jb} \leq 0.05$: la fig. 6.1 nous montre que cette limite supérieure sur y_{jb} va favoriser la sélection d'électrons à l'énergie de faisceau conformément à notre objectif[3]. L'effet de cette coupure ($y_{jb} \leq 0.05$) est illustré sur les fig. 6.6(a) et (b).

Nous montrons d'abord que le spectre en énergie au niveau générateur s'affine considérablement autour de l'énergie de faisceau après la coupure sur y_{jb} (fig. 6.6(a)), la queue à basse énergie résultant des événements radiatifs qui voient leur énergie incidente diminuée après émission d'un photon réel dans l'état initial. Il en est de même pour le comportement du spectre au niveau reconstruit (fig. 6.6(b)) : pour ce dernier nous distinguons la forme purement gaussienne de la distribution reconstruite

---

[3] Nous utilisons $y_{jb} \leq 0.05$ plutôt que $y_e \leq 0.05$ comme coupure sur y car, comme nous l'avons déjà mentionné, la résolution sur y_e à bas y n'est pas satisfaisante (divergence en $1/y_e$).

après la coupure qui correspond bien au produit de convolution du pic du spectre en énergie engendrée autour de l'énergie de faisceau (fig. 6.6(a)) par une gaussienne dont la largeur représente la résolution du SPACAL EM, pour une énergie proche de l'énergie de faisceau.

La déduction précédente des constantes de calibration :

$$c_i = \frac{< E_i^{MC} >}{< E_i^{Exp} >} \quad \forall i \tag{6.25}$$

peut maintenant être reprise à un niveau de précision supérieur :

- Les ajustements gaussiens de valeurs moyennes $< E_i^{MC} >$ pour le MC (DIP) et $< E_i^{Exp} >$ pour les données sont réalisés sur les spectres complets en énergie reconstruite : 25 GeV $\leq E_i \leq$ 30 GeV
- La forme trés piquée du spectre en énergie engendrée (fig. 6.6(a)) implique que l'influence des fonctions de structures paramétrisées dans la simulation MC est faible, ces dernières n'affectent pratiquement pas la forme du spectre énergétique.
- La largeur du spectre reconstruit pour les données permet d'extraire la résolution effective du SPACAL EM, cette information peut ensuite être intégrée dans le MC pour obtenir une simulation réaliste du détecteur.

De plus, pour la calibration finale, nous avons modifié quelque peu la procédure de calibration par la technique "des cellules les plus chaudes" décrite par la formule (6.25) ; nous avons en effet choisi de calibrer le SPACAL EM en domaines concentriques de section $r - \phi$ carrée : nous avons défini 20 carrés concentriques centrés par rapport au tube faisceau qui coupent l'axe x du SPACAL EM pour les valeurs suivantes (notées $R^c_{0,\lambda\subset[1,20]}$ et exprimées en cm) :

λ	$R^c_{0,\lambda}/cm$
1	6
2	6.5
3	7
4	7.5
5	8
6	8.5
7	9
8	9.5
9	10
10	10.5
11	11
12	11.5
13	12
14	14
15	16
16	18
17	20
18	24
19	28
20	32

Ensuite, pour tous les amas EM i de positions reconstruites X_i et Y_i dans un plan fixe du SPACAL situé à $z = -1.59m$ (la côte en z de ce plan correspond à la moyenne des Z_i des centres de gravité des amas EM), on définit $R^c_i = max(X_i, Y_i)$. Dès lors, s'il existe λ tel que :

$$R^c_i \subset [R^c_{0,\lambda}, R^c_{0,\lambda+1}]$$

alors la constante de calibration est calculée comme suit :

$$c_\lambda = \frac{< E^{MC}_{i\backslash R^c_i\subset[R^c_{0,\lambda},R^c_{0,\lambda+1}]} >}{< E^{Exp}_{i\backslash R^c_i\subset[R^c_{0,\lambda},R^c_{0,\lambda+1}]} >} \quad \forall\lambda \tag{6.26}$$

où $< E_{i\backslash R^c_i\subset[R^c_{0,\lambda},R^c_{0,\lambda+1}]} >$ représente la valeur moyenne de l'ajustement gaussien du spectre en énergie (reconstruite) après la coupure $y_{jb} \leq 0.05$ sur l'intervalle 25 GeV $\leq E_i \leq$ 30 GeV (voir ci-dessus). La sélection des événements de DIP est effectuée comme précédemment.

La calibration en bandes comprises entre deux carrés concentriques consécutifs respecte la géométrie structurelle du SPACAL qui est composé de modules de section $r - \phi$ carrée, elle présente également deux avantages par rapport à la technique précédente de calibration des cellules les plus chaudes :

- Chaque bande possède une statistique suffisante pour permettre des ajustements gaussiens convenables.

- En affectant la constante de calibration à une bande donnée, la réponse azimuthale du SPACAL EM se trouve homogénéisée par rapport à la technique précédente de calibration cellule par cellule.

Comme nous l'avons indiqué plus haut, la procédure qui va suivre permet également d'ajuster la résolution dans le MC pour reproduire celle observée dans les données :

$$\sigma^{(1)}_{\lambda,MC} = \sqrt{\sigma^2_{i\backslash R^c_i \subset [R^c_{0,\lambda},R^c_{0,\lambda+1}],Exp} - \sigma^2_{i\backslash R^c_i \subset [R^c_{0,\lambda},R^c_{0,\lambda+1}],MC}} \qquad (6.27)$$

où $\sigma^{(1)}_{\lambda,MC}$ est une correction à appliquer à la résolution nominale du MC.

Procédure finale de calibration EM du SPACAL

Nous allons appliquer les principes précédents afin d'obtenir une détermination de l'échelle absolue d'énergie EM pour le SPACAL avec une précision de l'ordre de 1%. La première méthode (cellule par cellule) que nous avons proposée nous a déjà permis de dériver quelques résultats importants que nous avons exposés au paragraphe précédent. Ces résultats peuvent également être exprimés pour les différents domaines de section $r-\phi$ carrée que nous considérons à présent. La fig. 6.7 en est une illustration : nous pouvons voir que la détermination de l'échelle d'énergie absolue est réalisée à mieux que 1.5% (fig. 6.7(b)) mais la résolution comparée données/MC reste assez différente à hauteur d'environ 10% en moyenne (fig. 6.7(d)) : notons tout de même que nous n'avons pas réalisé jusqu'à présent d'ajustement de la résolution effective du MC à partir des observations expérimentales.

Il s'agit maintenant d'améliorer ces résultats avec notre procédure de calibration à bas y_{jb} ($y_{jb} \leq 0.05$) en domaines de section $r - \phi$ carrée, par application des formules (6.26) et (6.27).

La fig. 6.8 illustre le résultat de la calibration pour quatre domaines différents ($11.5 \leq R^c/cm \leq 12$,$12 \leq R^c/cm \leq 14$, $14 \leq R^c/cm \leq 16$ et $16 \leq R^c/cm \leq 18$) ; les distributions représentées ont été calibrées par application des coefficients c_λ (pour les données) et σ_λ (pour le MC) conformément aux relations (6.26) et (6.27) ; on note alors que les gaussiennes ajustées pour chaque domaine sur les données et le MC sont en très bon accord tant pour leurs valeurs moyennes que pour leurs résolutions.

Les résultats pour tous les domaines sont résumés sur la fig. 6.9. On remarque que la détermination de l'échelle absolue d'énergie EM dans SPACAL est réalisée à 0.6% près (voir fig. 6.9(b)) -après la mise en oeuvre de cette procédure-, on note également que les déviations des résolutions comparées données/MC restent faibles.

Nous montrons ensuite que la détermination de l'échelle absolue d'énergie EM pour le calorimètre SPACAL est conservativement de 0.6% : la fig. 6.10 reprend pour six domaines de sections $r - \phi$ carrées (définis sur cette figure) les spectres énergétiques après calibration par la méthode que nous avons décrite ci-dessus (voir également fig. 6.9). On représente des graphes similaires dans le cas où l'échelle d'énergie EM dans les données est augmentée globalement de 0.6% (fig. 6.11) puis dans le cas où cette échelle d'énergie est diminuée globalement de 0.6% (fig. 6.12) ; pour tous les domaines de sections $r - \phi$ carrée on distingue alors les désaccords qu'exhibent les comparaisons données/MC lorsque l'échelle d'énergie EM du SPACAL -pour les données- est augmentée ou diminuée de 0.6%, ce qui confirme notre assertion précédente :

la procédure de calibration -par la méthode du pic cinématique monochromatique- que nous avons réalisée nous a permis de déterminer l'échelle d'énergie EM du calorimètre SPACAL à 0.6% près pour $R^c \leq 35cm$.

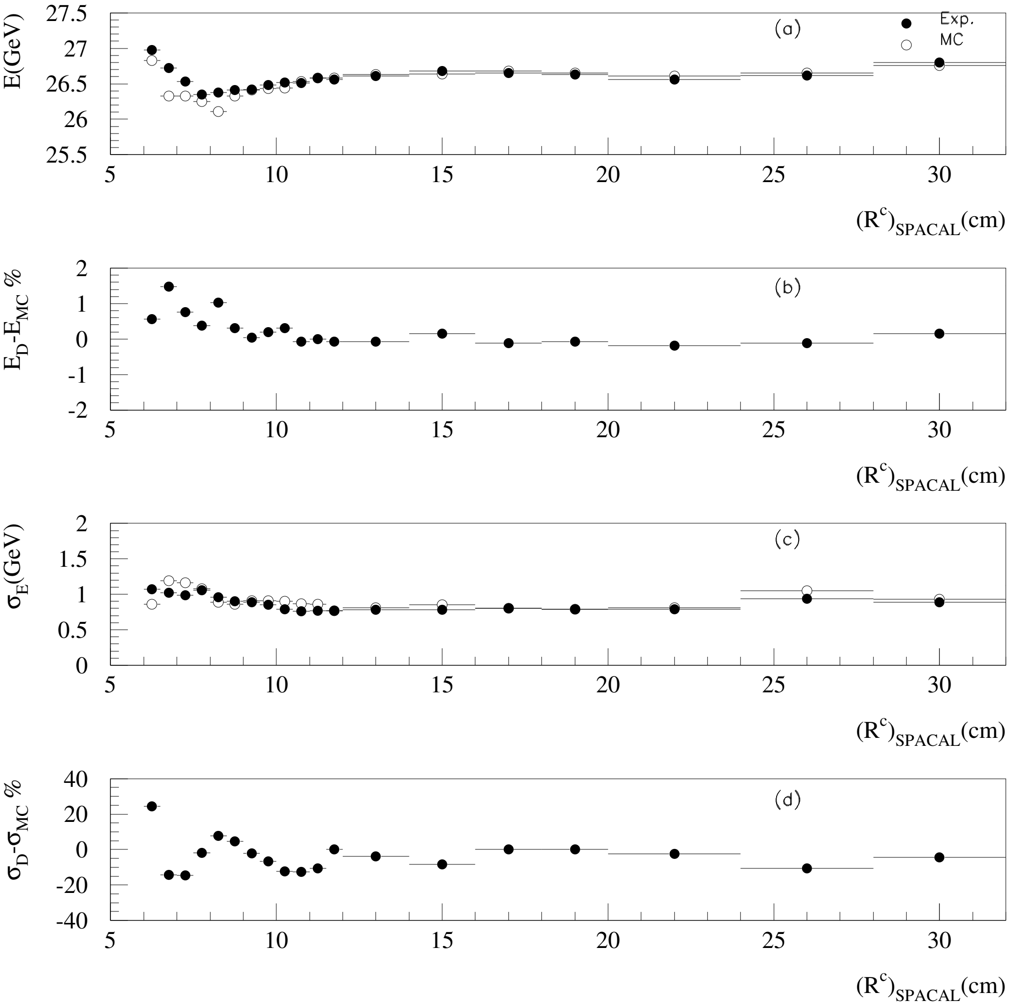


FIG. 6.7 – *Résultats de la calibration cellule par cellule (voir également fig. 6.5(b)), les résultats sont présentés en domaines de section $r - \phi$ carrée (R^c). En (a) se trouve la comparaison données/MC des énergies moyennes ($< E_i >$) ; les déviations en pour cent entre les différentes valeurs sont indiquées en (b). En (c) se trouvent les comparaisons données/MC pour les résolutions ; les déviations en pour cent de ces valeurs de résolution sont représentées en (d).*

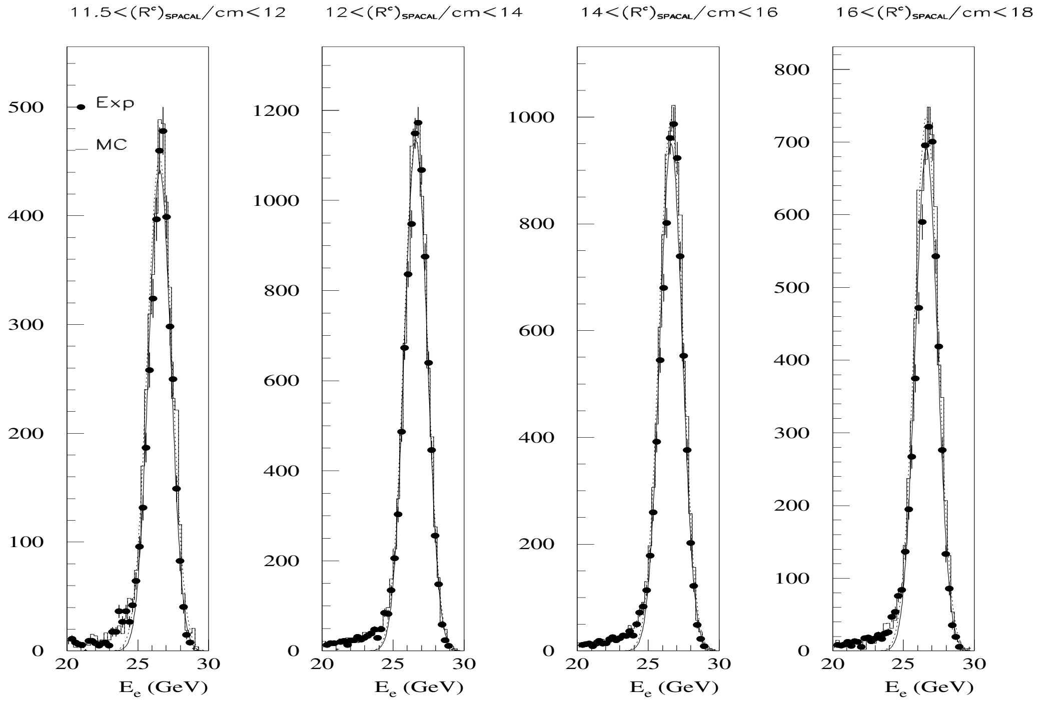


FIG. 6.8 – *Distributions en énergie calibrée pour les données et le MC pour quatre domaines de section $r - \phi$ carrée (R^c) différents ; Les gaussiennes (trait plein pour les données et trait pointillé pour le MC) se superposent remarquablement signant ainsi la qualité de la calibration effectuée.*

Vérification par la méthode "de l'angle double"

La méthode dite de l'angle double repose sur le fait que l'énergie de l'électron diffusé peut être reconstruite en utilisant uniquement des mesures angulaires :

$$E'_{e,DA} = \frac{E_e \sin\gamma_h}{\sin\gamma_h + \sin\theta_e - \sin(\theta_e + \gamma_h)} \tag{6.28}$$

avec : $\tan\frac{\gamma_h}{2} = \frac{\Sigma}{p_{T,h}}$, la variable γ_h ainsi définie représente l'angle du jet hadronique diffusé -dans le cas où il n'y a qu'un seul jet diffusé après interaction-. Cet angle est de plus évalué avec une bonne précision si la partie non-détectée de l'impulsion transverse de l'état final hadronique reste faible.

L'équation (6.28) nous permet alors de déduire deux propriétés intéressantes :

- L'énergie de l'électron diffusé exprimée comme $E'_{e,DA}$ est en première approximation indépendante de la calibration puisque dépendante uniquement de la reconstruction angulaire des électron et jet(s) diffusés.
- la quotient $\frac{E'_e}{E'_{e,DA}}$ produit une distribution très piquée qui est par conséquent très sensible à la détermination de l'échelle absolue d'énergie.

La méthode dite de "l'angle double" (θ_e et γ_h) consiste alors à utiliser les propriétés précédentes pour réaliser la calibration ; dans ce cas, les constantes de calibration

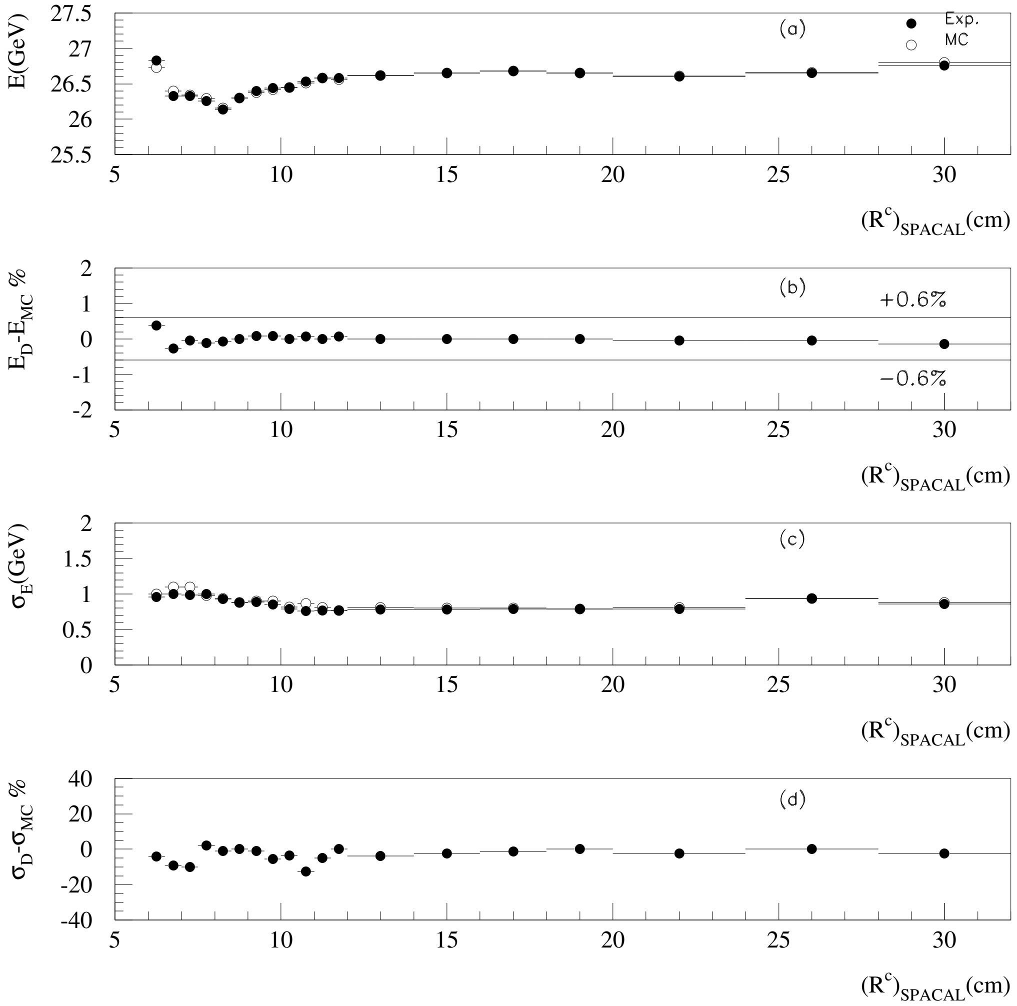


FIG. 6.9 – *Résultats de la calibration en domaines de section* $r - \phi$ *carrée* (R^c)*. En (a) se trouve la comparaison données/MC des énergies moyennes ; les déviations en pour cent entre les différentes valeurs sont indiquées en (b). En (c) se trouvent les comparaisons données/MC pour les résolutions ; les déviations en pour cent de ces valeurs de résolution sont représentées en (d).*

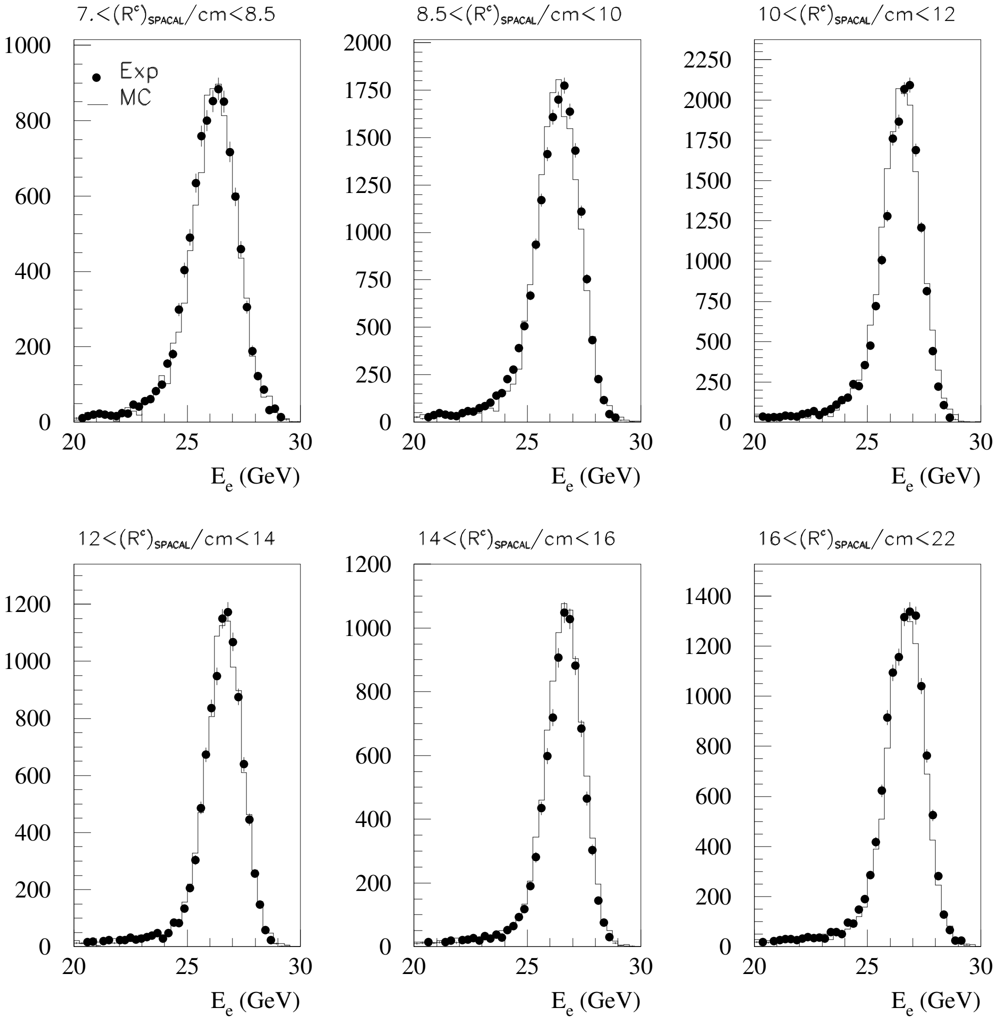


FIG. 6.10 – *Spectres en énergie calibrée pour les données (points noirs) et le MC (trait plein) ; ils sont représentés pour six domaines de R^c.*

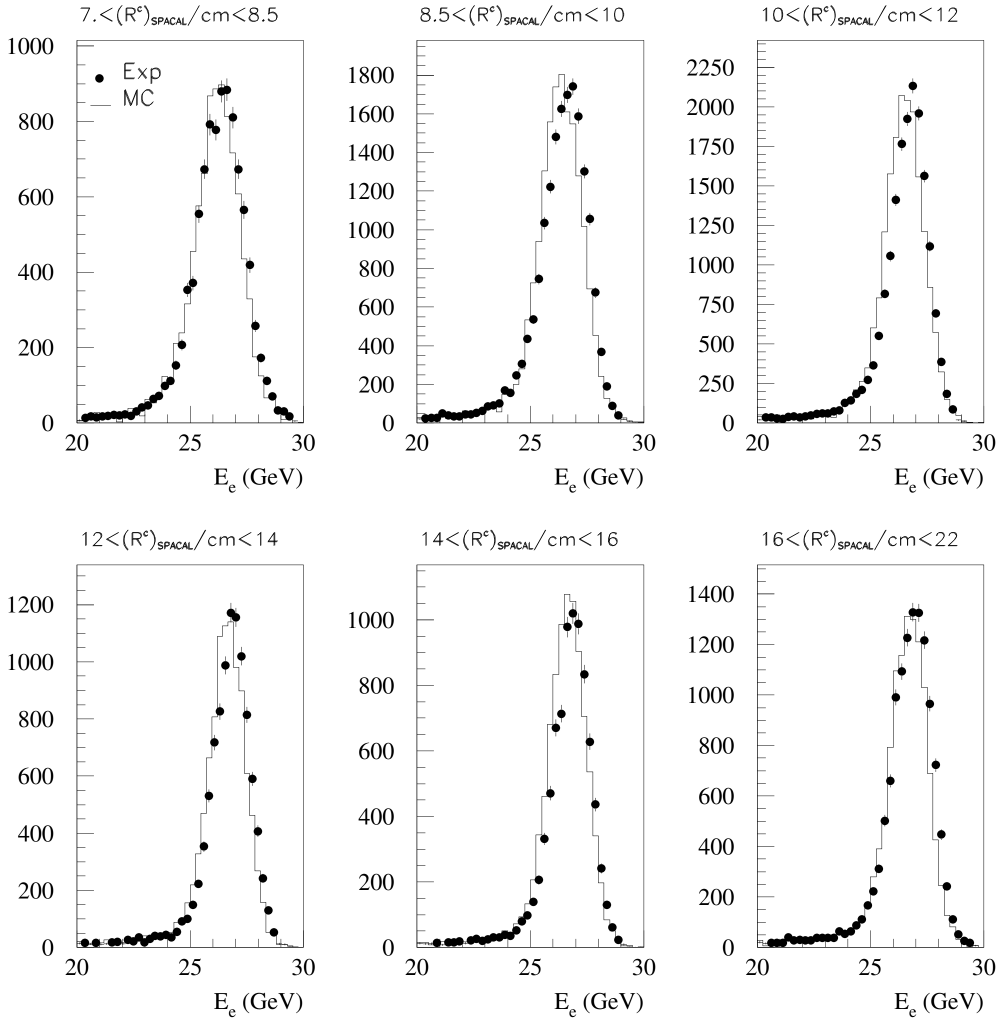


FIG. 6.11 – *L'échelle d'énergie dans les données a été globalement augmentée de 0.6%, le MC est inchangé par rapport à la fig. 6.10.*

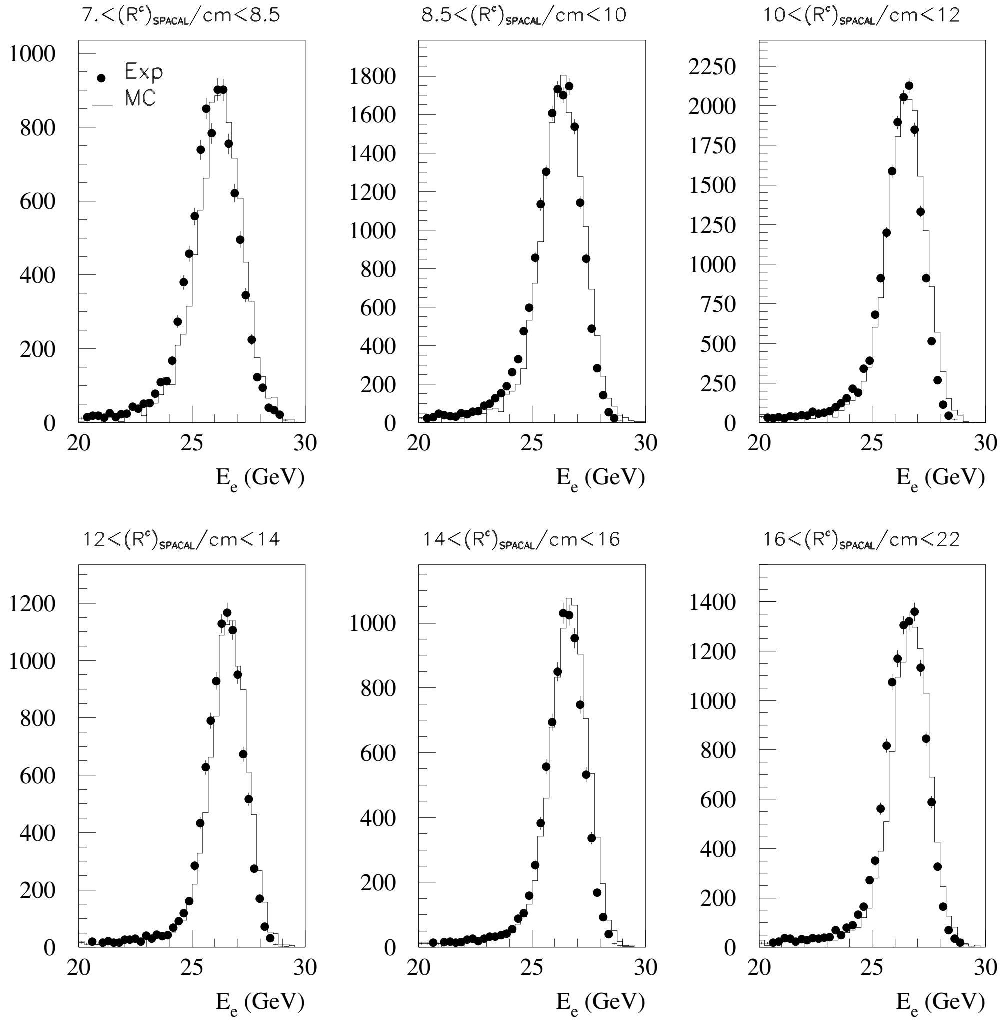


FIG. 6.12 – *L'échelle d'énergie dans les données a été globalement diminuée de* 0.6%, *le MC est inchangé par rapport à la fig. 6.10.*

sont déterminés comme suit :

$$c_{DA} = \frac{< \frac{E_e^{MC}}{E_{e,DA}^{MC}} >}{< \frac{E_e^{Exp}}{E_{e,DA}^{Exp}} >} \tag{6.29}$$

Nous n'utilisons pas ici la relation (6.29) pour obtenir les facteurs de calibration car nous les avons déduits précédemment (voir ci-dessus) ; cependant, nous nous servons de la sensibilité de la distribution $\frac{E'_e}{E'_{e,DA}}$ à la détermination de l'échelle absolue d'énergie pour vérifier les conclusions que nous avons énoncées plus haut. On représente ainsi sur la fig. 6.13 cette distribution pour trois des six domaines de section $r - \phi$ définis précédemment après la calibration finale. On représente ensuite des spectres similaires dans le cas où l'échelle d'énergie EM dans les données est augmentée globalement de 0.6% (fig. 6.14), puis dans le cas où cette échelle d'énergie est diminuée globalement de 0.6% (fig. 6.15) ; on distingue alors les désaccords qu'exhibent les comparaisons données/MC lorsque l'échelle d'énergie EM du SPACAL -pour les données- est augmentée ou diminuée de 0.6% : ceci confirme nos déductions précédentes concernant la détermination de l'échelle absolue d'énergie EM dans SPACAL, cette dernière est déterminée conservativement à 0.6% près (pour les électrons du pic cinématique).

Conclusions

Les études que nous avons menées jusqu'ici nous ont donc permis de réaliser la calibration EM du SPACAL avec une incertitude sur l'échelle absolue d'énergie de 0.6% pour des énergies de l'ordre de 27 GeV ; de plus, ce résultat est corroboré par deux méthodes différentes (méthode du pic cinématique monochromatique et méthode double angle). Munis de cette calibration finale, nous pouvons alors étudier l'homogénéité spatiale de la réponse du SPACAL et la linéarité de cette dernière, c'est-à-dire la précision attendue aux basses énergies.

La calibration permet d'homogénéiser la réponse du calorimètre SPACAL, en particulier quand celle-ci est opérée en domaines de section $r - \phi$ carrée. Cependant, la réponse d'une cellule donnée peut varier suivant que l'impact a lieu en son centre ou à son bord. Les tests préparatoires nous ont déjà montré que cet effet reste faible pour le corps principal du SPACAL, seul le module “Insert” étant éventuellement sensible à de tels effets. Pour ce module, le taux maximum d'inhomogénéité est de l'ordre de 7%, ce qui est corrigé par une prescription spécifique qui égalise la réponse des quatre sous-modules qui le composent (le “Veto Layer”).

La linéarité du SPACAL, ou plus généralement la relation entre l'énergie déposée dans les cellules et l'énergie mesurée dans le calorimètre, a fait l'objet d'une analyse lors des tests préparatoires (voir chapitre précédent) ; ces derniers ont montré que le maximum de déviation à la réponse linéaire du SPACAL est de l'ordre de 1.3%, cette propriété a été vérifiée par la suite à l'aide d'une méthode d'analyse qui utilise les événements QED Compton quasi réels.

De tels événements correspondent à l'interaction de l'électron incident avec un photon quasi réel issu du proton, soit $e + \gamma^* \rightarrow e + \gamma$; ainsi la réaction globale s'écrit :

$$e + p \rightarrow e + \gamma + X$$

Pour cette dernière, l'énergie de l'électron diffusé s'exprime en fonction de l'énergie incidente et des angles de l'électron et du photon diffusés :

$$E'_e = \frac{2E_e \sin\theta_\gamma}{\sin\theta_e + \sin\theta_\gamma - \sin(\theta_e + \theta_\gamma)} \tag{6.30}$$

Cette énergie, qui correspond à l'énergie déposée dans les cellules, ne dépend donc pas de la mesure de l'énergie calorimétrique et permet ainsi une détermination de la relation entre l'énergie calorimétrique et l'énergie déposée à basse énergie -car l'énergie incidente se répartit entre l'électron et le photon diffusés- ; c'est de cette manière que les résultats des tests préparatoires ont été vérifiés, apportant la confirmation que la réponse du SPACAL est bien linéaire à 1.3% près.

Ces études ont montré également que la détermination de l'échelle absolue d'énergie à basse énergie (8 GeV) est de l'ordre de 2.5%.

Pour l'analyse que nous proposons par la suite, nous considérons ainsi que l'incertitude sur la détermination de l'échelle absolue d'énergie est de 2.5% à 8 GeV et de 0.6% à 27 GeV respectivement, une interpolation linéaire étant effectuée entre ces deux limites.

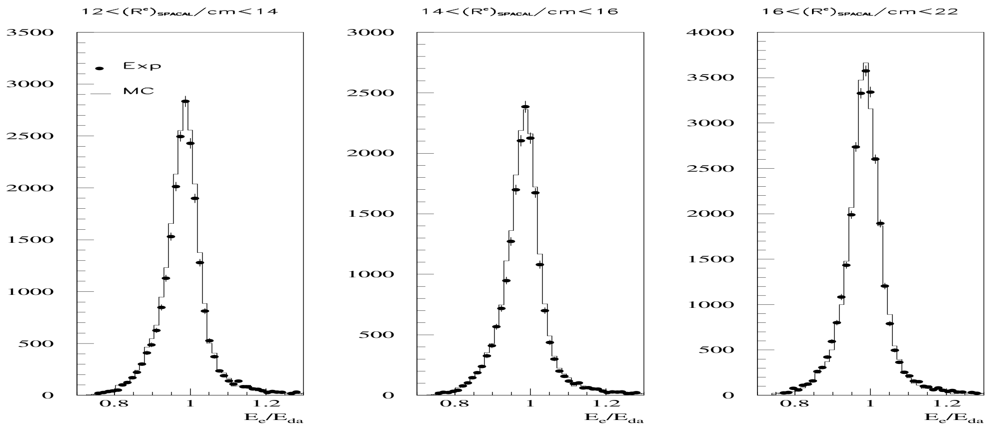


FIG. 6.13 – *Distributions* $\frac{E'_e}{E'_{e,DA}}$ *après calibration pour trois domaines de section* $r-\phi$ *carrée* (R^c) *introduits précédemment.*

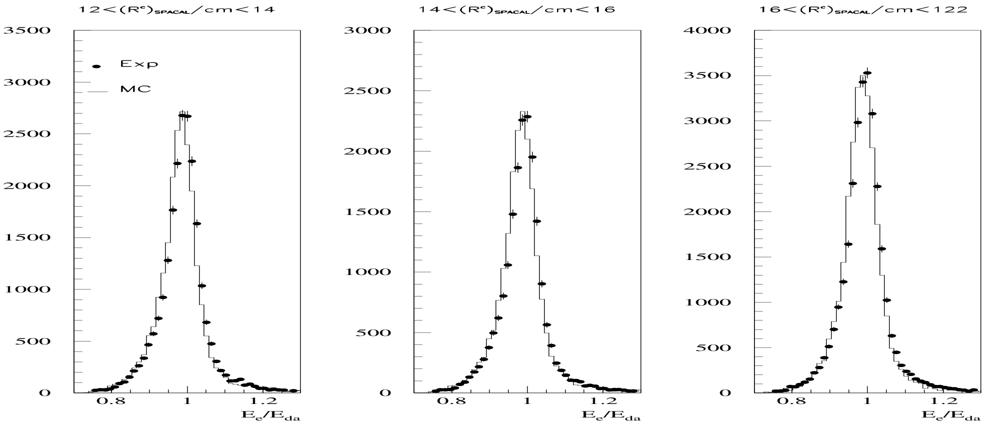


FIG. 6.14 – *L'échelle d'énergie dans les données a été globalement augmentée de* 0.6%*, le MC est inchangé par rapport à la fig. 6.13. On note alors les désaccords visibles des comparaisons données/MC.*

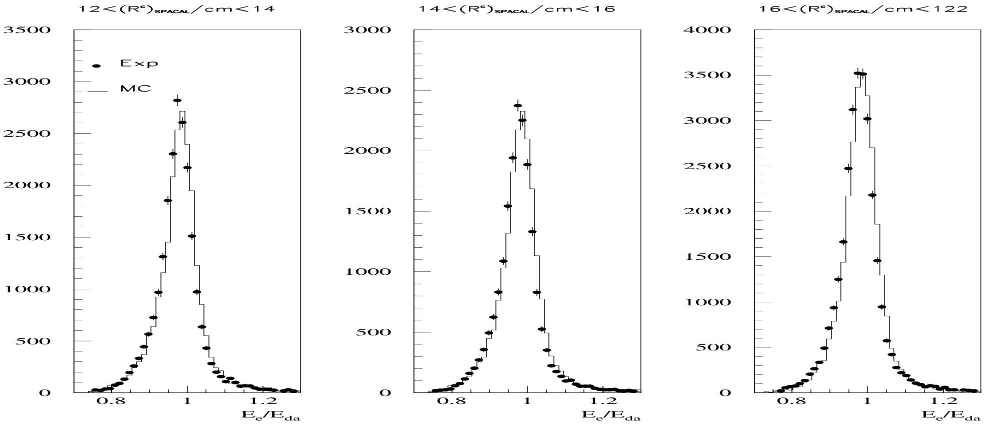


FIG. 6.15 – *L'échelle d'énergie dans les données a été globalement diminuée de* 0.6%*, le MC est inchangé par rapport à la fig. 6.13. On note alors les désaccords visibles des comparaisons données/MC.*

6.4 Calibration hadronique du calorimètre SPACAL

Les considérations précédentes concernent uniquement l'analyse des gerbes électromagnétiques et la réponse du SPACAL à ces dernières. Nous complétons maintenant notre étude du calorimètre SPACAL par l'analyse de sa réponse aux gerbes de hadrons[4].

Les deux types de processus sont très différents : les gerbes EM se développent via des réactions de brehmsstralhung et de création de paires e^+e^- alors que les gerbes hadroniques (HAD) sont dominées par les interactions fortes entre les hadrons et les noyaux constituant le matériau du détecteur ; la relation entre l'énergie calorimétrique et l'énergie déposée dans les cellules est donc différente dans les deux cas EM ou HAD.

Moyennant ces propriétés, l'intercalibration du SPACAL HAD (de même que le SPACAL EM pour $R^c_{SPACAL} \geq 35cm$) a été effectuée en utilisant les événements de muons cosmiques, l'incertitude sur la calibration relative étant alors de 5%.

On représente sur la fig. 6.16 les distributions caractéristiques de la mesure de l'énergie hadronique (notée E_h) dans SPACAL à la suite de cette calibration, on distingue :

- l'énergie hadronique dans SPACAL EM (notée $E_{h,spac.em.}$) ;
- l'énergie hadronique dans SPACAL HAD (notée $E_{h,spac.had.}$) ;
- l'énergie hadronique dans SPACAL (EM+HAD) (notée $E_{h,spac.}$).

Soulignons que pour déterminer la quantité d'énergie hadronique dans SPACAL EM, on soustrait à l'énergie totale mesurée dans SPACAL EM l'énergie du candidat électron pour les événements de diffusion inélastique profonde (DIP). Cette procédure nécessite donc de réaliser en amont une sélection des événements de DIP et des candidats électrons, cette sélection est expliquée précisément dans la suite (paragraphe suivant).

L'échelle absolue globale d'énergie hadronique est déterminée via la relation suivante :

$$< \frac{y_{jb}}{y_e} >= 1 \tag{6.31}$$

ce qui est un corollaire immédiat des propriétés sur la reconstruction de la cinématique que nous avons exposées au début de ce chapitre.

La fig. 6.17 montre alors que, suite aux distributions de la fig. 6.16, la détermination de l'échelle absolue -globale- d'énergie hadronique est convenable : sur la fig. 6.17, nous vérifions en effet que la relation (6.31) est bien vérifiée par les distributions y_{jb}/y_e pour les données et le MC, avec un bon accord entre les deux (données/MC). Sur ces distributions (fig. 6.17), nous avons sélectionné les événements tels que $y_e \geq 0.55$ car les gerbes hadroniques vers l'arrière du détecteur H1

---

[4] Comme nous le notons ci-dessous, cette analyse repose sur une détermination préalable d'un candidat électron pour les événements de diffusion inélastique profonde, nous explicitons ce dernier point dans le prochain paragraphe. Pour la clarté de l'exposé et pour présenter complètement la réponse énergétique du SPACAL -la calibration hadronique faisant suite à la calibration électromagnétique-, nous admettons pour le présent paragraphe qu'une telle sélection a été opérée.

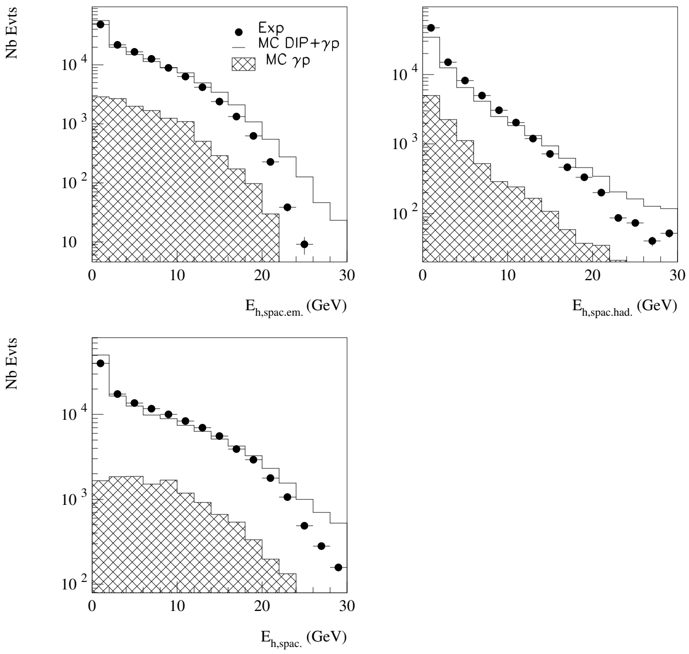


FIG. 6.16 – *Distributions d'énergie hadronique dans SPACAL EM ($E_{h,spac.em.}$), SPACAL HAD ($E_{h,spac.had.}$) et dans le SPACAL complet ($E_{h,spac.}$). Pour ces figures, les points noirs correspondent aux données, la zone hachurée au MC PHOJET de photoproduction (noté γp) et le trait noir au MC DIP plus PHOJET ; le MC PHOJET (ou γp) présente la proportion d'événements de photoproduction qui subsistent après la sélection DIP (voir plus loin), la distribution MC qui doit être comparée aux données est alors la somme du MC DIP et du MC PHOJET (lequel décrit la contamination γp à notre sélection DIP).*

(c'est-à-dire dans SPACAL) ont pour origine -cinématique- les événements à grands y, nous avons ainsi considéré une limite inférieure sur y_e (qui n'est pas sensible à l'échelle absolue d'énergie hadronique) pour rendre les distributions plus sensibles aux effets calorimétriques du SPACAL.

La fig. 6.18 montre ensuite qu'une variation de l'échelle globale d'énergie hadronique de ±7% sur les données induit de clairs désaccords sur les comparaisons données/MC pour la distribution en $E - P_z$ présentée avec la limite inférieure $y_e = 0.55$ $(E - P_z = \sum_{etat fin.tot.} E_i - P_{z,i})$.

La détermination de l'échelle absolue d'énergie hadronique est donc réalisée avec une incertitude de l'ordre de 7%. En fait, le raisonnement précédent permet de déduire que 7% est une borne supérieure de l'incertitude ; cependant, une variation de ±6% de l'échelle d'énergie hadronique dans les données ne présente pas d'effets visibles sur les comparaisons données/MC, l'ordre de grandeur de cette incertitude est donc bien de 7%.

Cette assertion est confirmée par la fig. 6.19, pour celle-ci les effets de la variation de l'échelle globale d'énergie de ±7% sur les données sont étudiés sur la distribution

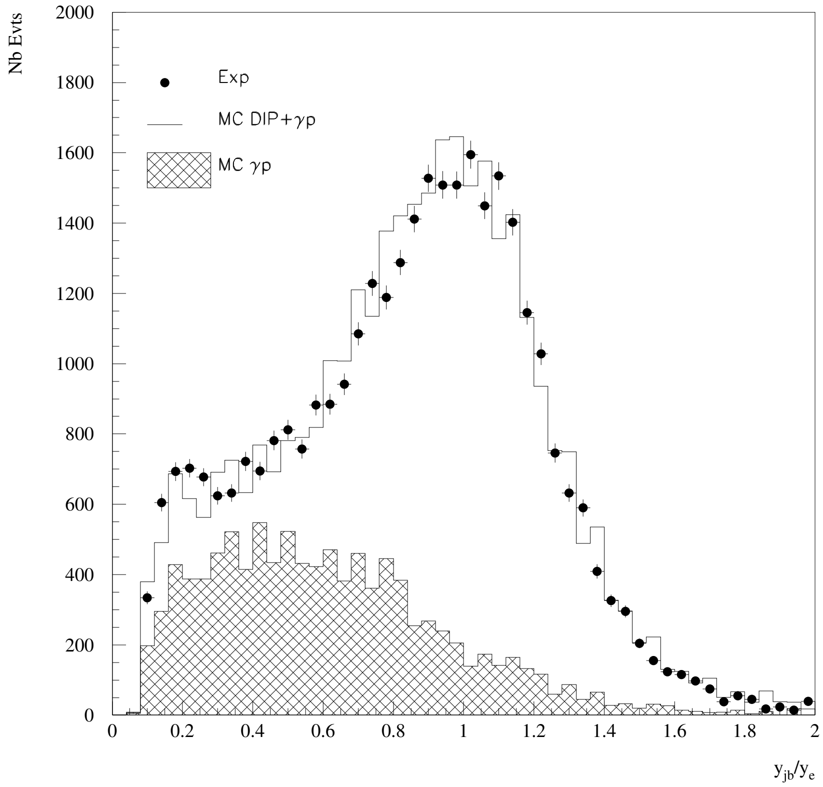


FIG. 6.17 – *Distribution y_{jb}/y_e pour $y_e \geq 0.55$; cette limite inférieure en y_e présente l'avantage de sélectionner cinématiquement les gerbes hadroniques vers l'arrière du détecteur H1, c'est-à-dire dans le calorimètre SPACAL, on vérifie : $< y_{jb}/y_e > \simeq 1$.*

$y_{jb,spac.}/y_e$, où :

$$y_{jb,spac.} = \frac{\sum\limits_{h \subset SPACAL} E_h - P_{z,h}}{2E_e}$$

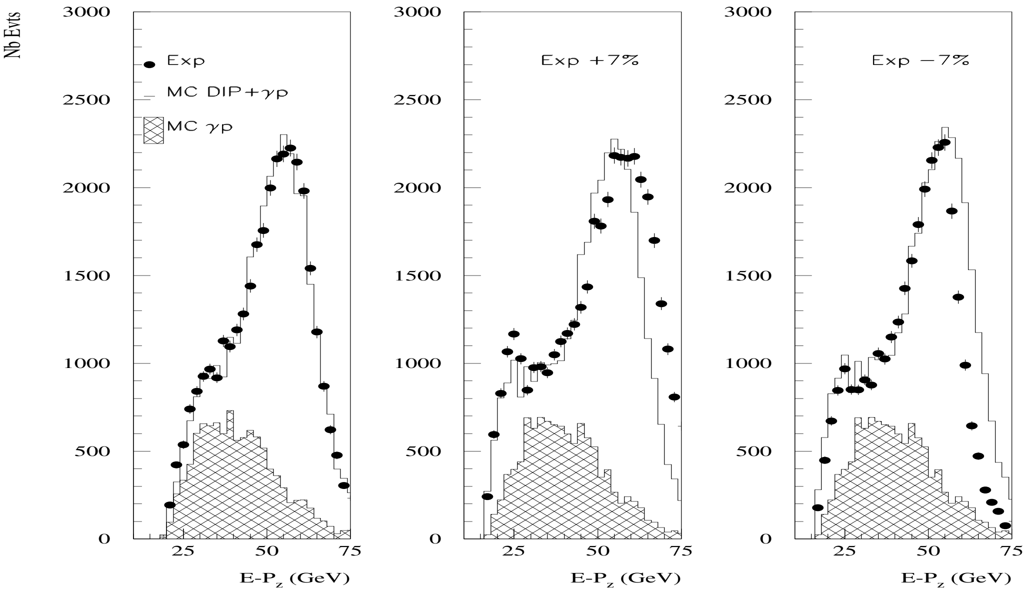


FIG. 6.18 – *Distributions en $E - P_z$ avec $y_e \geq 0.55$; elles sont représentées pour la calibration hadronique nominale puis lorsque l'échelle globale d'énergie hadronique dans les données est augmentée ou diminuée de 7% (Exp +7%, Exp −7% respectivement).*

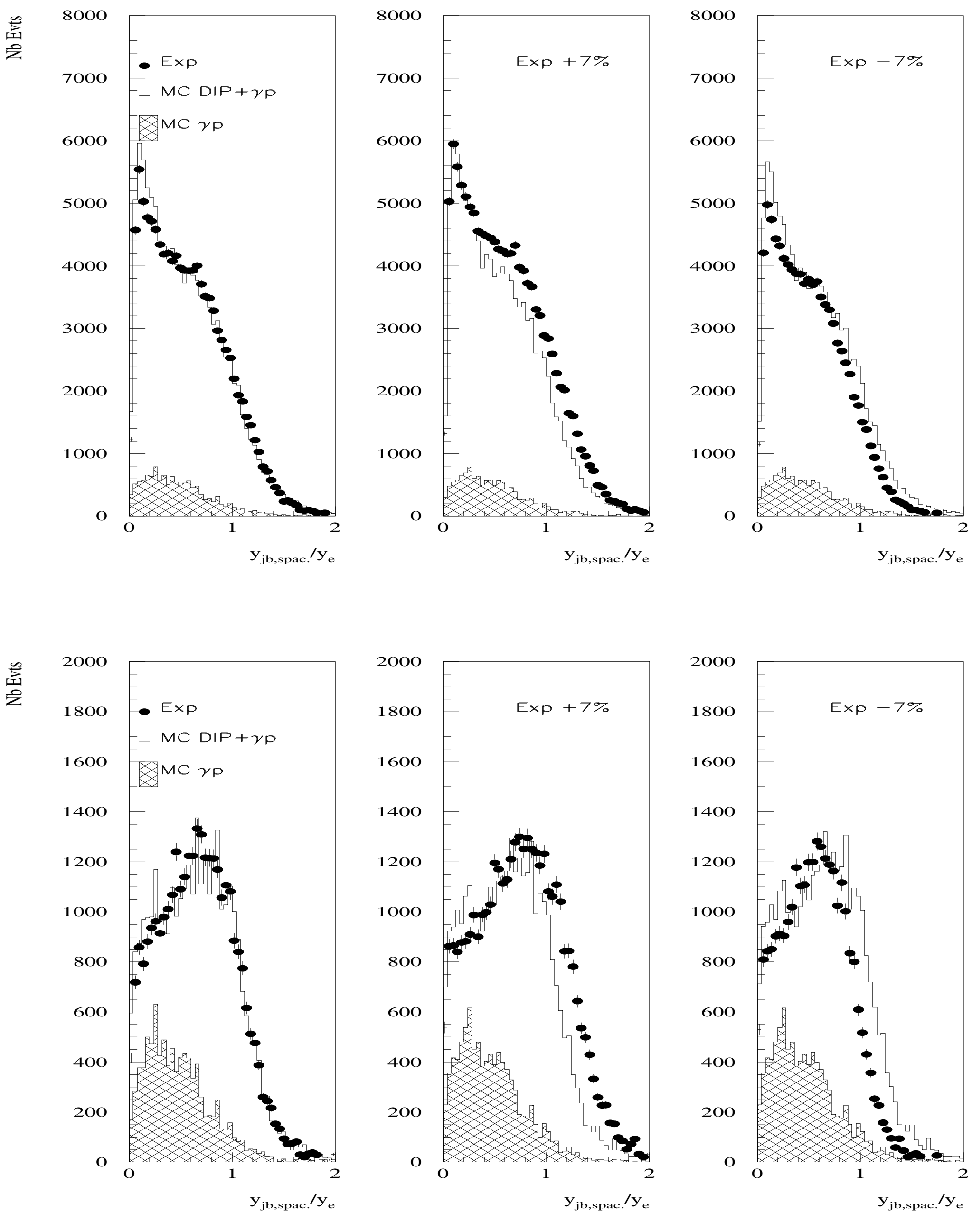


FIG. 6.19 – *Distributions en* $y_{jb,spac.}/y_e$ *avec la condition* $y_e \geq 0.55$ *(les trois spectres du bas) et sans cette condition (les trois spectres du haut) ; ces distributions sont représentées pour la calibration hadronique nominale puis lorsque l'échelle globale d'énergie hadronique dans les données est augmentée ou diminuée de 7%. On note que les distributions à grands* y_e *sont plus sensibles aux effets inhérents à la reconstruction énergétique dans SPACAL (voir texte).*

6.5 Sélection des périodes de prise de données

Les données que nous utilisons pour notre analyse correspondent à la période de prise de données de 1995 en configuration de vertex nominal : dans cette configuration, l'acceptance angulaire du corps du SPACAL est inférieure à 177.8°. Quelques conditions concernant le fonctionnement des sous-détecteurs et la stabilité de leurs réponses sont de plus requises pour qu'une période donnée soit sélectionnée :

- Les conditions de faisceau doivent être suffisamment bonnes pour que tous les constituants de la partie centrale du détecteur H1 soient opérationnels : les détecteurs de trace (CJC,CIZ/COZ BDC), le système de luminosité, les détecteurs de temps de vol et les calorimètres (PLUG,LAR,SPACAL).
- Le nombre d'événements par unité de luminosité doit être relativement stable au cours du temps ; en effet le nombre d'événements pour une période donnée doit être approximativement proportionnel à la luminosité enregistrée au cours de cette période ($\sigma = \frac{N}{\mathcal{L}}$), ainsi nous demandons que le nombre d'événements par unité de luminosité reste identique à 4σ près pour les différentes périodes, c'est-à-dire que seules des déviations de moins de 4σ par rapport à la valeur moyenne globale de toutes les périodes sont tolérées.
- La position énergétique du pic cinématique peut être décalée à cause d'un problème de haute tension des PMs, nous demandons que ce décalage soit inférieur à 1σ entre les différentes périodes.

6.6 Sélections des sous-déclencheurs du SPACAL pour les réactions de DIP

Dans le chapitre 5, nous avons décrit le fonctionnement du système de déclenchement logique central du détecteur H1 ainsi que les principales spécificités des sous-déclencheurs du SPACAL.

Les sous-déclencheurs ("subtriggers") du SPACAL utilisés pour notre analyse sont répertoriés dans la table (6.1) accompagnés de leurs principales caractéristiques et de la luminosité qui leur correspond : Dans la colonne 2 de cette table, nous donnons la définition des sous-déclencheurs ; pour chacun d'entre eux un minimum dénergie déposée dans le SPACAL est nécessaire au déclenchement. Les notations "IET >1","IET >2" correspondent ainsi à différents seuils IET du système de déclenchement du SPACAL, ils assurent une efficacité parfaite pour des énergies minimales de 8 GeV et 23 GeV respectivement. Tous les sous-déclencheurs demandent également l'absence de signaux de bruit de fond "hors temps" ; cette

sous-déclencheur	définition	pres. min.	pres. max.	Lumi (nb^{-1})	W
s2	IET > 1 ;$t_{0,vtx}$, $\neg RZ_{veto}$	1	11	619.9	1
s3	IET > 2	1	4	285.7	2.2
s0	IET > 1	1	30	116.5	5.3

TAB. 6.1 – *Sous-déclencheurs du SPACAL.*

condition logique est réalisée par les vétos de bruit de fond : ToF,FToF,PToF,BToF et le "Veto Wall" en association avec les conditions ToF intrinsèques des seuils IET de SPACAL.

Le sous-déclencheur s2 demande de plus une coincidence entre le seuil IET et une combinaison logique de conditions de sous-déclenchement liées à la reconstruction du vertex : nous notons symboliquement cette combinaison $t_{0,vtx}$; s2 demande de surcroît l'absence d'un signal dit RZ_{veto} : ce dernier repose sur un système de reconnaissance de traces dans les trajectographes CIZ/COZ qui permet d'estimer la position z du vertex de l'événement ; par exemple, les événements pour lesquels un trop grand nombre de traces pointent en dehors de la région d'interaction sont rejetés.

Les colonnes 3 et 4 de la table donnent ensuite l'intervalle de variation des facteurs d'atténuation ("prescale factors", notés "pres." dans la table) des différents sous-déclencheurs. On indique alors la luminosité collectée pour chacun d'entre eux ainsi que le poids moyen correspondant (W). La plus grande partie de la luminosité pour la prise de données 1995 -vertex nominal- a été collectée par le sous-déclencheur s2 ; s3 et s0, qui présentent des conditions de déclenchement moins restrictives, sont plus sensibles aux événements de bruit de fond, en conséquence ils ont été fortement atténués.

Cependant, s2 n'est pas complètement efficace car une partie non négligeable des événements de DIP ne satisfont pas les conditions de vertex notées $t_{0,vtx}$ qui lui ont été associées logiquement (voir table 6.1).

Les efficacités des sous-déclencheurs s2,s3 et s0, ainsi que l'efficacité de la condition logique de déclenchement RZ_{veto} sont présentées sur la fig. 6.20.

La sélection des sous-déclencheurs que nous adoptons pour notre analyse repose ensuite essentiellement sur le sous-déclencheur s2, s3 et s0 lui étant associés logiquement pour compenser son inefficacité à bas y_e (voir fig. 6.20).

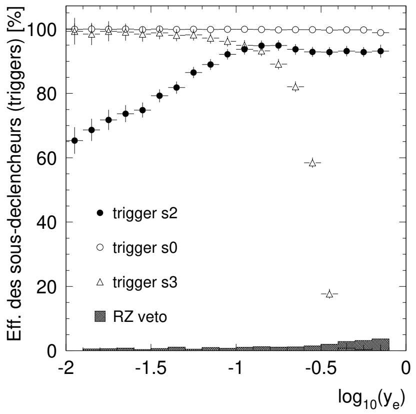


FIG. 6.20 – *Efficacités des sous-déclencheurs s2,s3 et s0 en fonction de* $\log_{10} y_e$ *; la distribution de* RZ_{veto} *indique la fraction d'événements perdus à cause de cette condition logique.*

6.7 Sélection des événements de DIP

La sélection des événements de DIP a pour objectif de concilier les deux propositions suivantes :

- perdre le minimum de vrais événements de DIP ;
- rejeter le maximum de bruit de fond à ce signal.

Le bruit de fond est constitué essentiellement des événements de photoproduction et des interactions du faisceau de protons avec les atomes du gaz résiduel ou des parois du tube faisceau ; il est donc important de rejeter efficacement les interactions résiduelles et d'estimer précisément la contamination de photoproduction qui reste après sélection DIP ; comme on le montre dans la suite, cette dernière tâche est réalisée avec le MC PHOJET.

Le premier pas que nous faisons dans le sens d'une sélection des événements de DIP avec un candidat électron diffusé dans SPACAL repose sur l'hypothèse que l'amas le plus énergétique dans le SPACAL EM (amas EM), quand il est associé à une trace bien définie dans le trajectographe à dérive arrière (la BDC), représente le candidat électron diffusé.

D'autres critères de sélection additionnels (ou coupures) sont ensuite imposés afin d'améliorer la pureté de l'échantillon de DIP ainsi sélectionné, ces critères ont pour fonction de rejeter les événements de bruit de fond au signal de DIP.

La trace reconstruite dans la BDC et associée à l'amas EM repérant le candidat électron est déterminée comme suit :

- Pour chaque trace reconstruite dans la BDC, une ligne droite est extrapolée à partir du vertex de l'événement jusqu'à la coordonnée $z = z_{amas}$ de l'amas EM (position longitudinale du centre de gravité de ce dernier).
- Pour chacune de ces extrapolations, il est ensuite possible de calculer sa distance $\Delta_{(tr_i,amas)}r$ par rapport au barycentre de l'amas EM dans le plan xy du SPACAL :

  $$\Delta r_{(tr_i,amas)} = \sqrt{((x_{tr_i} - x_{amas})^2 + (y_{tr_i} - y_{amas})^2)}$$

  où x_{amas}, y_{amas} désignent les coordonnées du barycentre de l'amas EM , et x_{tr_i}, y_{tr_i} désignent les coordonnées de l'extrapolation associée à la trace (i), repérées dans le plan xy du SPACAL.
- La trace (j) dont l'extrapolation présente la plus petite distance $\Delta r_{(tr_j,amas)}$ est désignée comme celle correspondant à l'amas EM ; la trace (j) vérifie donc :

  $$\Delta r_{(tr_j,amas)} \leq \Delta r_{(tr_i,amas)} \quad \forall\ i$$

Pour les candidats électron d'énergie suffisamment élevée (typiquement $E'_e \geq 8$ GeV), la courbure des traces dans le champ magnétique est suffisamment faible pour que l'extrapolation linéaire soit une très bonne approximation de la trajectoire réelle.

Les coordonnées x_{tr_j}, y_{tr_j} de la trace extrapolée (j) associée à l'amas EM sont alors utilisées dans tous les calculs qui nécessitent la connaissance de la position radiale (et azimutale) de l'amas EM ; on a en effet indiqué au chapitre 5 que la BDC présente une résolution nominale très fine : $\sigma(r) = 0.4mm$ et $\sigma(r\phi) = 0.8mm$, on en déduit la résolution angulaire accessible pour la mesure de θ_e :

$$\sigma(\theta_e) = \frac{\sigma(r)}{z_{BDC} - z_{vtx}} \simeq 0.5\ mrad$$

L'utilisation du SPACAL seul pour estimer l'angle de l'électron diffusé à partir de son centre de gravité dans le calorimètre fournirait une résolution de l'ordre de $2\ mrad$, d'où l'intérêt de la démarche précédente d'associer amas EM et trace BDC.

Notons que la présence d'une trace dans la BDC permet également de rejeter efficacement des événements de photoproduction pour lesquels un pion π^0 simule un électron diffusé dans SPACAL mais ne laisse aucune trace dans la BDC (car sa charge est nulle).

Les critères additionnels pour la sélection DIP ainsi que leurs motivations sont énoncés ci-dessous :

- **Energie de l'amas EM** : l'énergie de l'amas EM dans SPACAL doit vérifier la condition : $E_{amas} > 8$ GeV . Cette coupure rejette les amas de faible énergie engendrés par les interactions résiduelles induites par les faisceaux incidents. De plus, elle supprime une partie importante du bruit de fond de photoproduction.

  Des études MC ont montré de plus qu'au-delà de cette énergie ($E_{amas} > 8$ GeV), la probabilité que l'amas EM le plus énergétique dans SPACAL corresponde effectivement à l'électron diffusé est de l'ordre de 99%.

  Notons également que pour les événements tels que $E_{amas} > 8$ GeV , la combinaison de sous-déclencheurs que nous avons choisie est $\simeq 100\%$ efficace (voir le paragraphe précédent).

- **Trace dans la BDC** : pour la trace dans la BDC la plus proche de l'amas EM (voir ci-dessus), nous imposons des conditions sur la séparation amas-trace en r et en $r\phi$ séparément : les événements sont sélectionnés si la trace BDC associée au candidat électron se trouve à moins de $2cm$ en distance radiale et moins de $2.5cm$ en distance azimutale du centre de gravité de cet amas EM dans SPACAL, soit : $\Delta r \leq 2cm$ et $r\Delta\phi \leq 2.5cm$.

  Ces critères reflètent la géométrie structurelle et la résolution nominale de la BDC ($\sigma(r) = 0.4mm$ et $\sigma(r\phi) = 0.8mm$) mais sont essentiellement limités par la résolution du SPACAL, on note par exemple que la valeur supérieure de Δr n'est pas égale à la moitié de celle de $r\Delta\phi$ comme le permettrait en principe la résolution nominale de la BDC.

  Ces critères assurent que la trace BDC et l'amas EM sont associés à la même particule, ils permettent de plus de rejeter les événements de photoproduction où les gerbes hadroniques dans SPACAL sont assez distantes de leur trace BDC correspondante et où, comme mentionné ci-dessus, un pion π^0 simule un électron dans SPACAL mais est associé aux traces d'autres particules.

- **Position radiale du barycentre de l'amas EM** : nous imposons une limite inférieure à la position radiale du barycentre de l'amas EM dans SPACAL : $R_\theta \geq 8.9cm$, soit $\theta_e \leq 177^o$; R_θ est déterminé en utilisant la trace BDC associée au candidat électron.

  Cette coupure rejette les candidats électrons qui se trouve dans le module "Insert" pour lequel la perte d'énergie dans le tube à vide fausse la détermination de l'énergie calorimétrique déposée dans ce module.

  Cette coupure permet ainsi de réduire les effets de bord -à proximité du tube faisceau- qui détériorent quelque peu les performances du SPACAL et de la BDC.

- **Energie dans la couche véto du SPACAL** : nous demandons que l'énergie déposée y soit inférieure à 1 GeV : $E_{veto} \leq 1$ GeV . De même que la coupure précédente, cette dernière permet de rejeter les événements qui pourraient présenter une perte d'énergie dans le tube à vide incorrectement estimée.

  De plus, la contamination par des particules produites via les interactions résiduelles qui diffusent dans le SPACAL à partir d'éléments de construction proche de l'interaction (les collimateurs par exemple) est également réduite par cette coupure.

- **Taille transverse de l'amas EM** : la taille transverse du candidat électron est limitée à 3.5 cm, soit :

  $$\begin{aligned} R_{amas,i} &= \frac{1}{E_{amas,i}} \sum_{j=1}^{n_i} e_j \sqrt{(x_j - x_{amas,i})^2 + (y_j - x_{amas,i})^2} && (6.32) \\ &\leq 3.5 \ cm && (6.33) \end{aligned}$$

  où l'amas repéré par l'indice (i) a déposé son énergie totale $E_{amas,i}$ dans n_i cellules de positions x_j, y_j et d'énergie e_j.

  La taille transverse des gerbes EM est en effet plus petite que celle des gerbes HAD, cette coupure rejette donc une partie des événements de photoproduction.

- **Taille longitudinale de l'amas EM** : les performances des parties EM et HAD du SPACAL nous ont permis de dériver un critère de séparation des électrons et des pions :

  $$R_E = \frac{E_{amas}}{E_{amas} + E_{had}} \geq 0.95$$

  où E_{had} représente l'énergie hadronique déposée derrière le candidat électron.

  Nous avons vu au chapitre précédent que, pour des énergies dans SPACAL de 2 GeV à 7 GeV, cette condition donne une efficacité de détection des électrons de l'ordre de 97%. Pour des énergies supérieures ($E_{amas} \geq 8$ GeV) l'efficacité de cette coupure est encore meilleure ($\simeq 99\%$) comme nous le montrons dans la suite.

- **Reconstruction du vertex**: Nous demandons que les événements possèdent un vertex primaire reconstruit à partir d'au moins une trace centrale ou avant avec la condition :

  $$|z_{nominal} - z_{vertex}| < 30cm$$

  où $z_{nominal}$ repère la position longitudinale du point d'interaction nominal.

  Les paquets satellites ainsi que les interactions résiduelles provoquent un élargissement important de la distribution des vertex primaires, la coupure ci-dessus est ainsi ajustée à trois fois la largeur des paquets collisionnels (3σ) et réduit considérablement la contamination de l'échantillon DIP sélectionné par de tels événements de bruit de fond.

  Une bonne reconstruction du vertex dans ces limites est également importante pour assurer une reconstruction précise de l'angle polaire du candidat électron à partir de sa trace BDC.

  Notons également que le rejet des paquets satellites par la coupure : $|z_{vertex} - z_{nominal}| < 30cm$ implique une correction de $-3.6\% \pm 1.5\%$ sur la luminosité intégrée. Cette correction introduit la principale incertitude sur la normalisation globale des mesures de sections efficaces.

Nous représentons les distributions -après sélection DIP- pour chacune des variables définies dans la liste ci-dessus sur les figures qui suivent :
les variables de correspondance amas-trace Δr,$r\Delta\phi$ et $\sqrt{(\Delta r)^2 + (r\Delta\phi)^2}$ ainsi que la position longitudinale du vertex (z_{vertex}) sont présentées sur la fig. 6.22 ;
les tailles transverse et longitudinale de l'amas EM sont reportées sur la fig. 6.23 ;
finalement, l'énergie de l'amas EM dans SPACAL, l'énergie dans la couche véto (du module “Insert”) et la position radiale R_θ se trouvent sur la fig. 6.24 et la fig. 6.25 respectivement.

Sur cette dernière figure, on note que la distribution de R_θ (fig. 6.25(a)) présente une déplétion d'événements dans les données par rapport au MC au voisinage $R_\theta \sim 25$ *cm*, effet qui ne s'observe pas sur la distribution radiale de la position de l'amas EM lorsque cette dernière est déterminée à partir des coordonnées de l'amas mesurées avec le calorimètre (voir fig. 6.21). Il s'agit donc vraisemblablement d'une propriété induite par la méthode de reconstruction des traces dans la BDC puis à l'association de l'amas EM et de sa trace la plus proche.

Cet effet peut être interprété de différentes façons. Par exemple la présence d'un cable ou d'un matériau passif quelconque devant la BDC à cette position (~ 25 *cm* dans une direction orthogonale à l'axe du faisceau) impliquerait la constitution d'une gerbe EM assez étendue -composée de nombreuses particules peu énergétiques (e^+, e^-, γ)- après interaction du candidat électron avec le matériau mort ; ce dernier produirait ainsi un grand nombre de traces dans la BDC (~ 50). C'est en effet ce que nous observons : au voisinage de ce rayon ($R_\theta \sim 25$ *cm*), le nombre total de traces reconstruites dans la BDC est de l'ordre de 50 quelle que soit la section en ϕ sélectionnée. De plus, comme l'algorithme de reconstruction des traces dans la BDC associe une trace à une particule, la probabilité de reconstruire correctement la trace du candidat électron diminue avec le nombre de traces engendrées par celui-ci. Cet effet de création d'une gerbe EM étendue impliquerait donc une migration

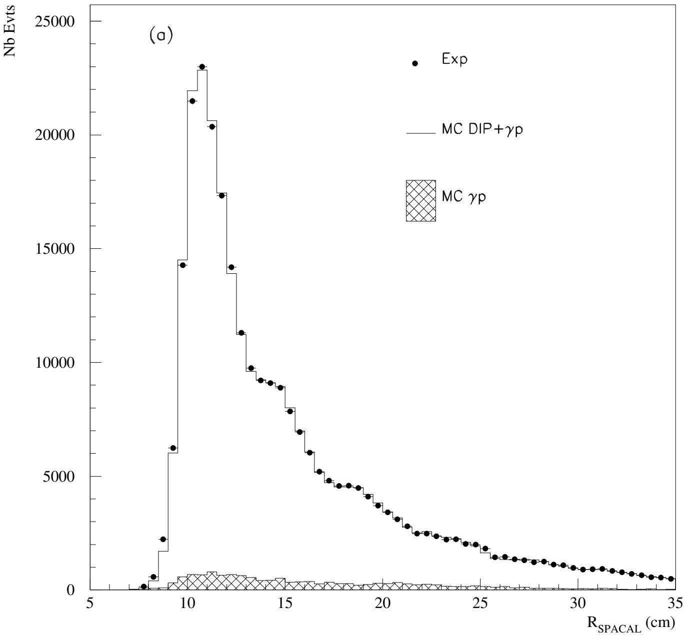


FIG. 6.21 – *Position radiale de l'amas EM mesurée avec le calorimètre SPACAL.*

des événements pour des valeurs de $R_\theta \sim 25 cm$ vers des valeurs supérieures ou inférieures.

Une autre influence provient ensuite de la présence du champ magnétique qui courbe les trajectoires des particules d'autant plus facilement qu'elles sont peu énergétiques, ce qui est le cas dans une gerbe étendue où de nombreuses particules ($\sim$ 50) se partagent l'énergie de l'amas diffusé. En conséquence, nous nous attendons plutôt à observer (dans les données) une migration des particules reconstruites à $R_\theta \simeq 25$ *cm* vers des valeurs de R_θ inférieures. C'est effectivement ce que nous observons sur la fig. 6.25(a).

Une autre explication de cet effet - qui complète la précédente- provient de la technologie de construction de la BDC. Pour un rayon (R_{BDC}) d'environ 25 *cm*, la distance entre les fils de la BDC change progressivement de 3 cm pour les grands rayons ($R_{BDC} >$ 25 cm) à 1 *cm* pour les petits rayons ($R_{BDC} <$ 25 cm) ; ainsi, pour la région de transition $R_{BDC} \simeq 25$ *cm*, la probabilité de reconstruire et de sélectionner une trace BDC parmi celles situées à $R_{BDC} <$ 25 cm est augmentée par rapport à la probabilité de reconstruction à des rayons supérieurs.

Pour prendre en compte cet effet, la simulation MC a été corrigée pour reproduire le comportement en $R_\theta \simeq 25$ *cm* observé dans les données : ainsi, pour les points d'impact mesurés dans SPACAL entre 24.75 *cm* et 27 *cm*, la position radiale déterminée à partir de la BDC (R_θ) est décalée vers les plus bas rayons -d'au plus 3 *mm*-, la valeur du décalage étant donnée par un polynôme d'ordre trois ajusté sur les distributions données/MC au voisinage de $R_\theta = 25$ *cm* ; le résultat est reporté sur la fig. 6.25(b).

Nous avons appliqué ce traitement en même temps que tous les autres critères de sélection pour déduire les distributions des variables exposées ci-dessus.

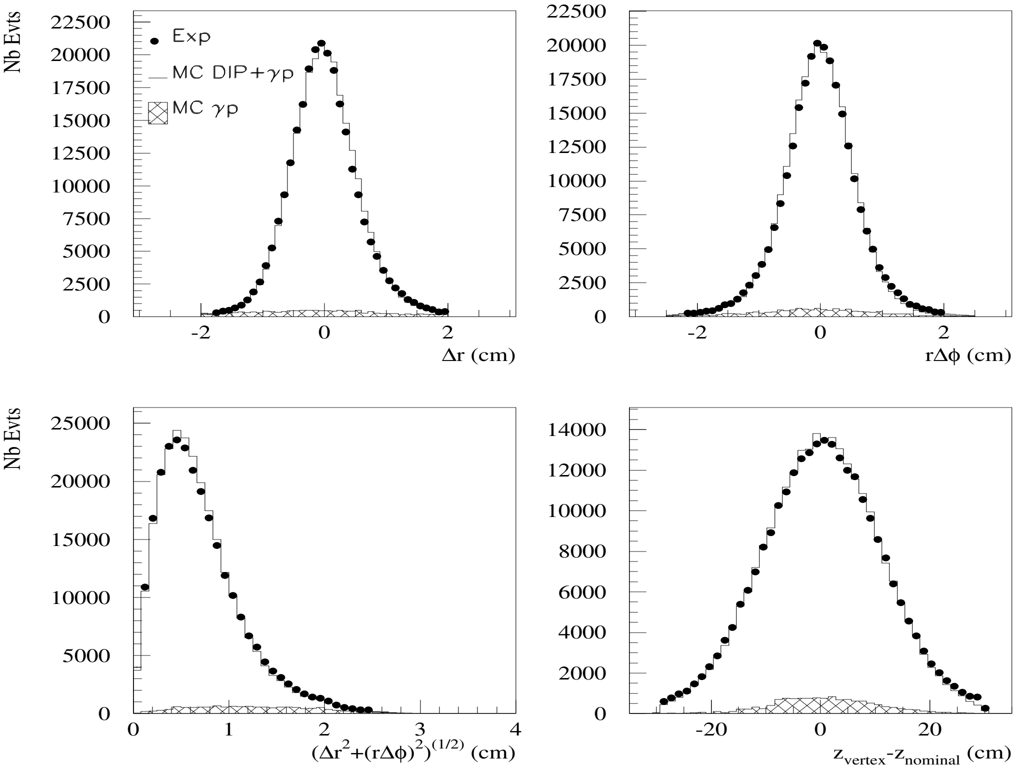


FIG. 6.22 – *Distributions de correspondance amas (EM)-trace (BDC),* Δr,$r\Delta\phi$ *et* $\sqrt{(\Delta r)^2 + (r\Delta\phi)^2}$ *ainsi que la position longitudinale du vertex* (z_{vertex}).

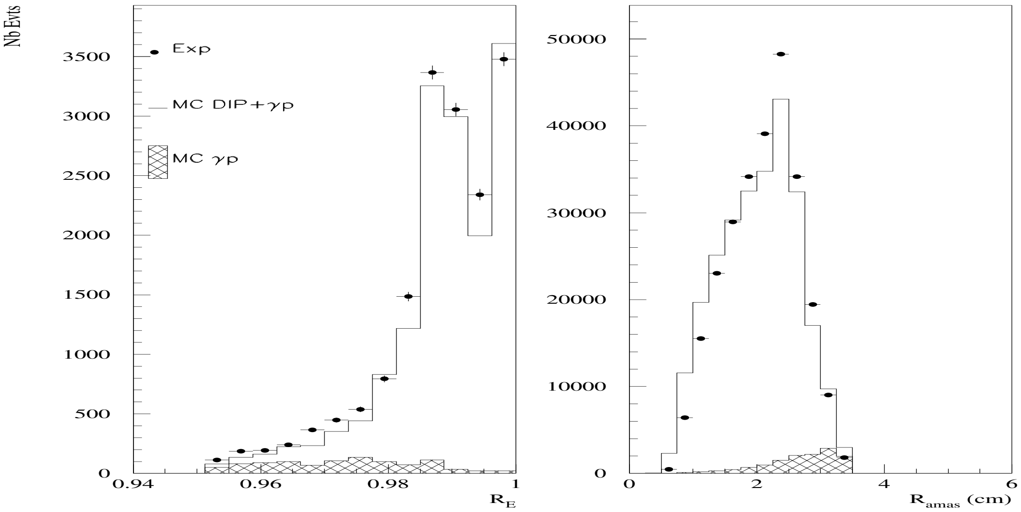


FIG. 6.23 – *Distributions des variables R_E et R_{amas} qui représentent la taille longitudinale et transverse de l'amas EM respectivement. Notons que R_E -en tant que rapport de deux quantités énergétiques- est sans unité alors que R_{amas} est exprimée en cm (voir texte).*

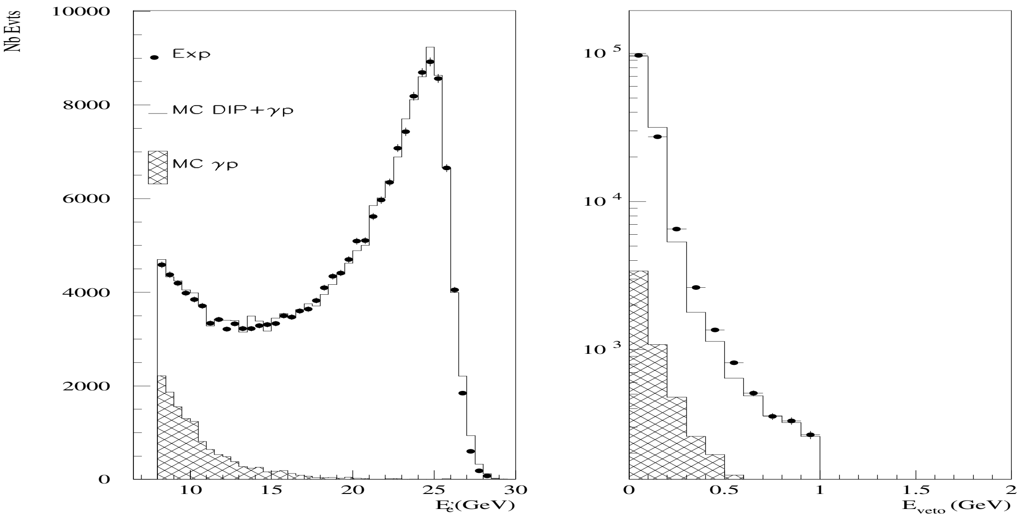


FIG. 6.24 – *Energie de l'amas EM (E'_e) et énergie déposée dans la couche véto du module "Insert" (E_{veto}). Nous avons représenté l'énergie de l'amas EM avec la condition $y_{jb} \geq 0.05$ afin d'éliminer la contribution des événements du pic cinématique qui interviennent essentiellement à haute énergie ; nous nous référons au paragraphe concernant la calibration EM du SPACAL pour une analyse détaillée de ces derniers.*

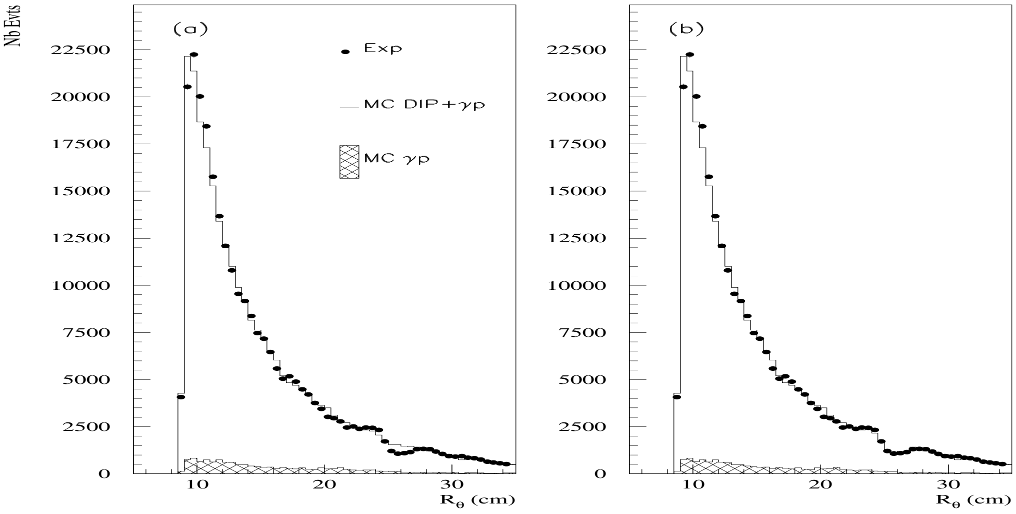


FIG. 6.25 – *Distribution R_θ ; en (a) on note une déplétion d'événements dans les données au voisinage de $R_\theta \simeq 25cm$ dont nous avons fourni une interprétation dans le texte (la présence d'un matériau passif à cette position radiale et le développement d'une gerbe étendue du candidat électron après collision avec ce dernier permet en effet de comprendre cette observation) ; en (b) nous illustrons le traitement de cet effet que nous proposons; (voir texte).*

6.8 Bruit de fond de photoproduction

Introduction

Les processus de photoproduction (également nommés processus γp) constituent la principale source de bruit de fond à l'échantillon d'événements de DIP que nous venons de sélectionner, en effet la section efficace de photoproduction qui est de l'ordre de 10 μb est environ 100 fois plus importante que celle de DIP ($\sim$ 100 nb).

Nous avons vu cependant sur les distributions que nous avons présentées jusqu'ici que l'estimation du bruit de fond γp avec le MC PHOJET est correcte puisque les sommes du MC DIP et du MC γp s'ajustent bien aux données.

Notons également qu'il est possible de réduire la contamination de ce bruit de fond à notre échantillon d'analyse en renforçant les coupures ci-dessus mais nous rejetterions alors dans le même temps une importante proportion d'événements de DIP ; la sélection précédente correspond ainsi au meilleur compromis entre les deux objectifs que nous avons énoncés au début du paragraphe précédent :

- Perdre le minimum de vrais événements de DIP.
- Rejeter le maximum de bruit de fond à ce signal (en particulier le bruit de fond γp).

Dans ce paragraphe, nous allons préciser la compréhension que nous avons de la contamination γp à notre échantillon DIP, nous explicitons également la qualité de la description de cette contamination via le MC PHOJET ; nous définissons à cette occasion ce que nous appelons "événements étiquetés".

Pour les événements γp, l'électron et le proton interagissent avec une très faible impulsion transférée ($Q^2 < 0.01$ GeV ^{2}), c'est-à-dire qu'ils échangent un photon quasi-réel. Pour ces valeurs de Q^2, l'impulsion transverse de l'électron est négligeable devant son impulsion longitudinale et ce dernier est généralement diffusé dans le tube à vide ; il se trouve cependant qu'une fraction de ces événements satisfont nos critères de sélection DIP ; pour ces derniers, la signature du candidat électron dans SPACAL est simulée par des particules de l'état final hadronique.

Typiquement, cette signature peut être engendrée par des photons énergétiques issus de la désintégration de π^0 qui se convertissent en $e^{\pm}$ dans les matériaux morts (puis en photons). De plus, la superposition d'hadrons chargés ($\pi^{\pm}$) avec ces photons énergétiques, de même que des gerbes hadroniques seules lorsqu'elles fluctuent électromagnétiquement lors de leurs développements, peuvent reproduire assez correctement la signature d'un amas EM dans SPACAL.

Pour l'analyse que nous proposons, le générateur PHOJET a été utilisé pour estimer le bruit de fond de photoproduction. Nous avons déjà quelques éléments d'appréciation de ses performances ; notons également qu'une bonne évaluation de ce bruit de fond est essentielle puisqu'elle affecte directement les mesures de sections efficaces.

Dans cette perspective, nous comparons les données et les prédictions du MC PHOJET en utilisant les événements dans lesquels un électron est détecté dans l'"Electron Tagger" (ET) (nous expliquons cette procédure dans la suite). Nous discutons alors les corrections éventuelles à apporter au MC PHOJET et nous estimons l'incertitude sur la soustraction du bruit de fond γp.

Evénements étiquetés

Environ 10% des événements γp, qui satisfont les critères de notre sélection DIP, peuvent être identifiés sans ambiguïté car le véritable électron diffusé dans le tube à vide lors de l'interaction est détecté dans l'ET du système de luminosité (situé à $z = -33m$ dans le tunnel de HERA). De plus, comme les trajectoires de ces électrons (que l'on qualifie d'"étiquetés" dans la suite) sont courbées dans le champ magnétique de HERA, l'acceptance de l'ET dépend fortement de l'impulsion de ces électrons et donc de la variable cinématique y.

Plus généralement, un événement est qualifié d'étiqueté si une quantité d'énergie d'au moins 4 GeV est mesurée dans l'ET. Toutes les distributions sont réalisées en imposant les critères de sélection DIP exposés précédemment, nous demandons de plus que la quantité d'énergie dans le détecteur de photon (PD) soit inférieure à 2 GeV et que $(E-P_z)_{tot} \leq 68$ GeV avec :

$$(E-P_z)_{tot} = E - P_z + 2E_{ET}$$

où E_{ET} désigne l'énergie déposée dans l'ET. Ces conditions additionnelles servent à rejeter les événements de Bethe-Heitler (BH) qui forment un bruit de fond aux événements γp : les événements de BH ($ep \to ep\gamma$) interviennent en coïncidence avec des événements de DIP et satisfont ainsi les critères de sélection DIP, le taux de superposition étant de l'ordre de 0.4% ; en tant que superposition de deux événements, les BH correpondent à des valeurs de $(E-P_z)_{tot}$ telles que :

$$(E-P_z)_{tot}^{(BH)} \simeq 4E_e - \delta$$

où δ représente l'énergie du photon non prise en compte dans $(E-P_z)_{tot}$.

Une évaluation de cette quantité montre que :

$$(E-P_z)_{tot}^{(BH)} \simeq 90 \text{ GeV } \pm 22 \text{ GeV}$$

La coupure $(E-P_z)_{tot} \leq 68$ GeV est ainsi ajustée pour rejeter de tels événements. Les distributions relatives aux variables $(E-P_z)_{tot}$,E_{ET} ainsi que les observables E'_e et θ_e du "faux" électron simulé dans SPACAL pour les événements étiquetés sont présentées sur la fig. 6.26, ces figures montrent que l'accord entre les données et le MC γp est correct, les fluctuations maximales étant de l'ordre de 30% : c'est la valeur que nous considérons par la suite pour estimer l'erreur inhérente à la soustraction du nombre d'événements γp (évalué avec le MC PHOJET) à notre échantillon d'événements de DIP.

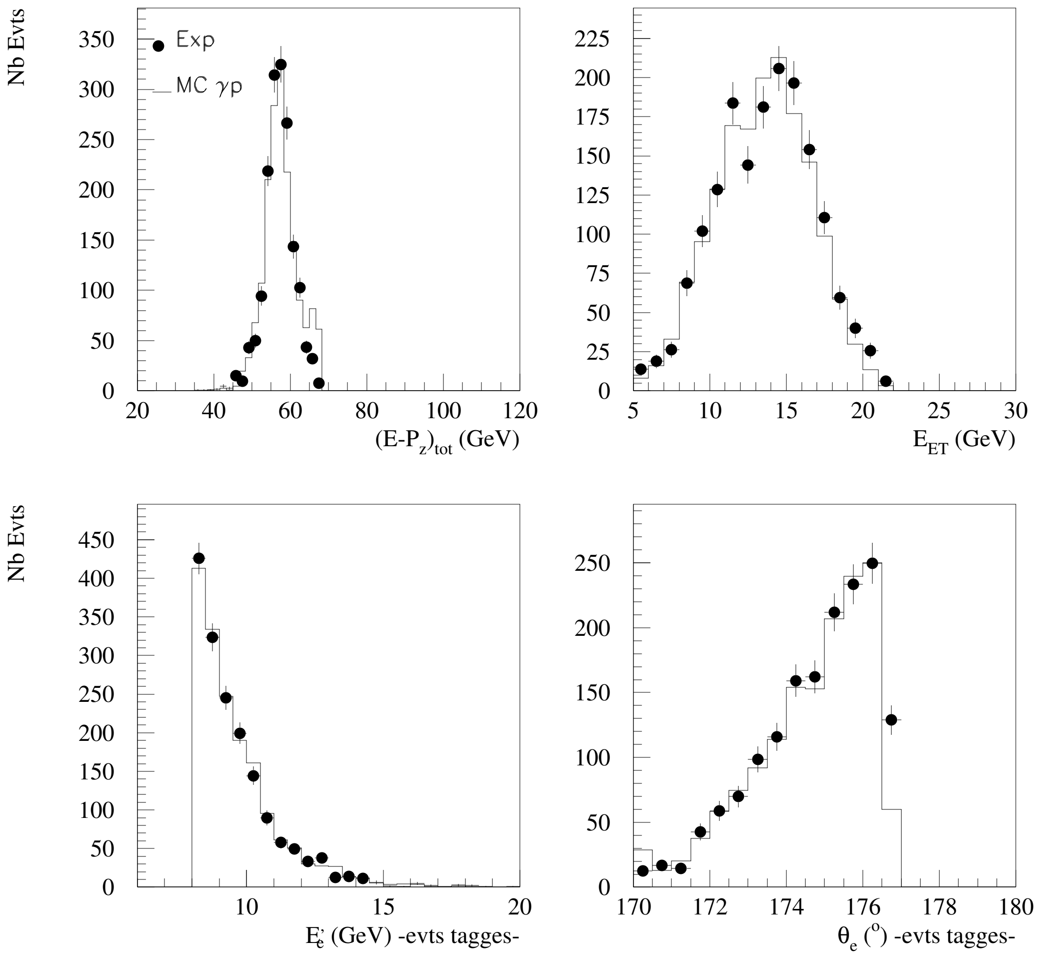


FIG. 6.26 – *Distributions relatives aux variables $(E - P_z)_{tot}$,E_{ET} ainsi que les observables E'_e et θ_e du "faux" électron simulé dans SPACAL pour les événements étiquetés.*

6.9 Distributions des variables cinématiques après sélection DIP

Nous avons déjà illustré le comportement de certaines variables, en particulier celles qui nous ont été utiles lors de l'application des critères de sélection DIP.

De plus, nous avons vérifié que la simulation des processus photoproduction permet d'estimer correctement la contamination qu'ils induisent sur l'échantillon DIP que nous avons sélectionné.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter les distributions des principales variables cinématiques pour les méthodes électron et sigma essentielles dans la détermination des sections efficaces puis dans la mesure de F_2 ; c'est ce que nous faisons sur les figures qui suivent.

La fig. 6.27 représente l'énergie du candidat électron diffusé dans SPACAL (E'_e) pour $y_{jb} > 0.05$ et $y_{jb} < 0.05$, la distribution pour laquelle $y_{jb} < 0.05$ représentant la contribution des événements du pic cinématique.

La fig. 6.28 représente l'angle polaire du candidat électron diffusé dans SPACAL (θ_e), mesuré à l'aide de la BDC avec une résolution de 0.5 $mrad$.

Les variables cinématiques y et Q^2 pour les méthodes électron (y_e,Q^2_e) et sigma (y_Σ,Q^2_Σ) sont ensuite illustrées sur la fig. 6.29.

Un bon accord données/MC est observé sur ces figures de contrôle.

La fig. 6.30 présente les rapports y_Σ/y_e et $p_{t,h}/p_{t,e}$ et la distribution $E - P_z$; cette dernière est présentée pour tout le domaine cinématique accessible en y puis pour le domaine des grands y : $y_e > 0.55$, pour lequel l'état final hadronique est diffusé essentiellement dans le calorimètre arrière SPACAL. On note également la disymétrie de la distribution y_Σ/y_e : en effet, une radiation QED de l'électron incident implique $y_\Sigma/y_e < 1$ (voir les équations (6.2) et (6.7)), ce qui permet de justifier l'allure de cette distribution.

Les distributions y_Σ/y_e et $p_{t,h}/p_{t,e}$ sont finalement représentées dans les cas où la somme sur l'état final hadronique est réalisée sous-détecteur par sous-détecteur (fig. 6.31) ; on distingue ainsi :

-les distributions $y_{\Sigma,LAR}/y_e$ et $p_{t,h,LAR}/p_{t,e}$ qui prennent en compte l'état final hadronique mesuré dans le calorimètre à Argon Liquide ;

-les distributions $y_{\Sigma,TR}/y_e$ et $p_{t,h,TR}/p_{t,e}$ qui prennent en compte l'état final hadronique mesuré à l'aide de l'impulsion des traces ;

- finalement, les distributions $y_{\Sigma,SPAC}/y_e$ et $p_{t,h,SPAC}/p_{t,e}$ qui prennent en compte l'état final hadronique mesuré dans le calorimètre SPACAL.

Pour ces différentes observables, l'accord entre les données et les prédictions MC est très bon, ce qui permet de conclure d'une part que le MC reproduit bien l'état final hadronique et d'autre part que les résolutions des variables cinématiques évaluées par les méthodes sigma ou électron sont bien comprises et donc que les calibrations électromagnétique et hadronique sont compatibles.

6.10 Conclusions

Tout au long de l'analyse développée dans ce chapitre nous avons atteint plusieurs objectifs nécessaires à l'étude des événements de DIP avec un candidat électron diffusé dans SPACAL :

♠ La calibration électromagnétique du SPACAL : après une description et une analyse de la procédure que nous avons mise en oeuvre, nous avons montré que cette dernière nous a permis de déterminer l'échelle absolue d'énergie dans le SPACAL EM à 0.6% près pour les électrons du pic cinématique ($E'_e \simeq 27$ GeV).

♠ La calibration hadronique du SPACAL : pour celle-ci également nous avons mis en évidence la valeur de l'incertitude sur la détermination de l'échelle globale d'énergie : 7%.

♠ La sélection des périodes de prise de données réalisées en 1995 en mode d'interaction nominal en association avec une sélection des sous-déclencheurs du SPACAL a constitué un premier pas dans le sens d'une sélection des événements de DIP et d'un rejet optimisé des événements de bruit de fond à ce signal.

♠ Nous avons alors présenté la sélection des événements de DIP (avec un candidat électron diffusé dans SPACAL) ; cette dernière repose sur un ensemble de critères qui nous ont permis conjointement de sélectionner les événements de DIP et de rejeter les événements de bruit de fond (interaction résiduelles ou événements γp). Nous avons pu déterminer à cette occasion le degré de précision atteint dans l'estimation du bruit de fond de photoproduction qui constitue le bruit de fond dominant à l'échantillon DIP sélectionné.

♠ Les distributions des variables cinématiques ont finalement été présentées, la qualité de l'accord entre les distributions relatives aux données et au MC (DIP + γp) traduit la qualité incidente que nous avons acquise de la compréhension des sous-détecteurs utilisés pour cette analyse. L'ensemble des figures de comparaisons données/MC exposées dans ce chapitre illustre cet accord.

Nous sommes maintenant en mesure de poursuivre cette analyse et d'obtenir une mesure de la fonction de structure F_2 ; nous devons préciser la procédure que nous adoptons pour réaliser cette mesure, sélectionner les domaines cinématiques pour lesquels nous l'effectuons et déterminer avec précision les efficacités des coupures de sélection DIP que nous avons définies plus haut ; c'est ce que nous développons dans le chapitre suivant, dans lequel nous prolongerons et nous compléterons les résultats déjà obtenus en ce qui concerne la détermination des erreurs systématiques.

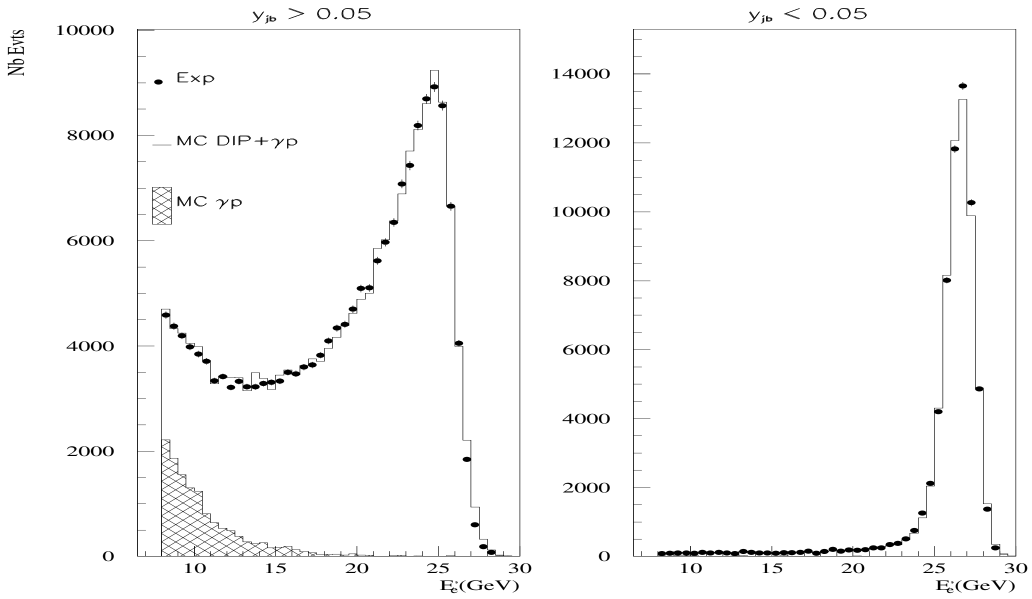


FIG. 6.27 – *Energie du candidat électron diffusé dans SPACAL (E_e') pour* $y_{jb} > 0.05$ *et* $y_{jb} < 0.05$.

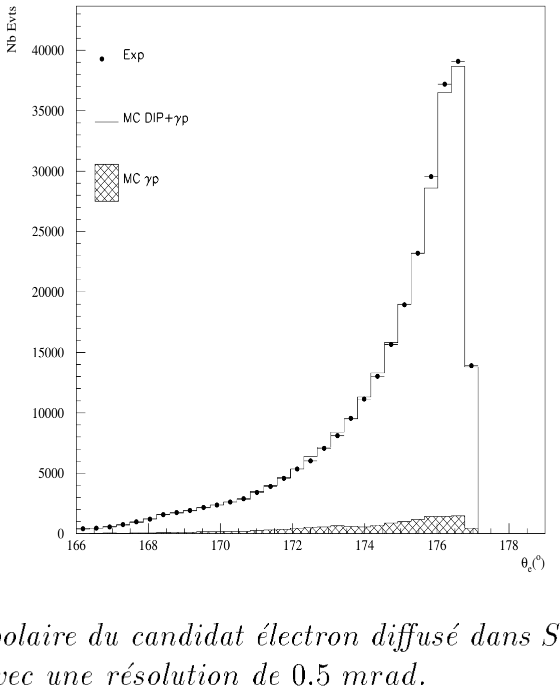


FIG. 6.28 – *Angle polaire du candidat électron diffusé dans SPACAL* (θ_e)*, mesuré à l'aide de la BDC avec une résolution de* 0.5 *mrad.*

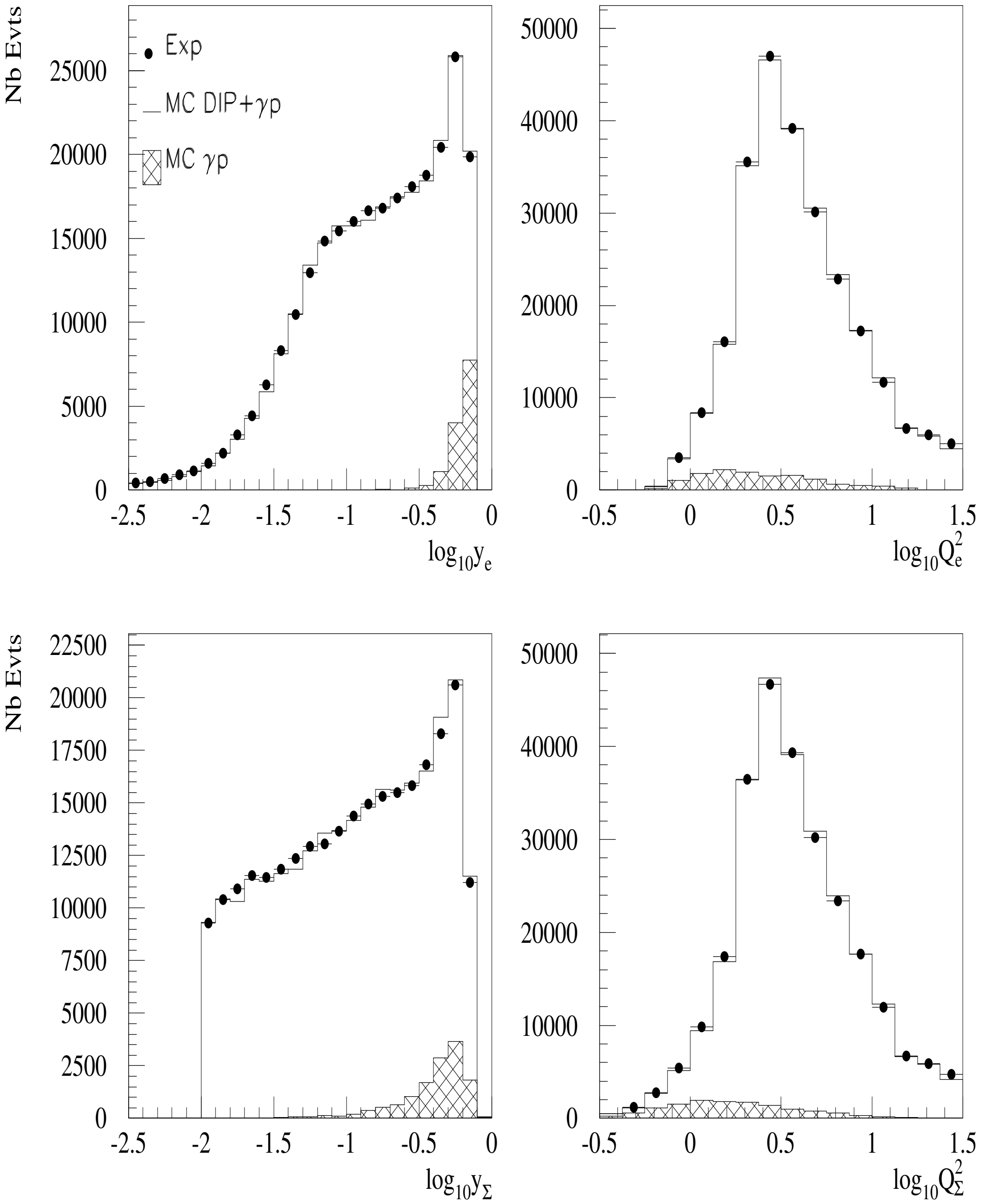


FIG. 6.29 – *Distributions des variables cinématiques y et Q^2 pour les méthodes électron (y_e,Q_e^2) et sigma (y_Σ,Q_Σ^2).*

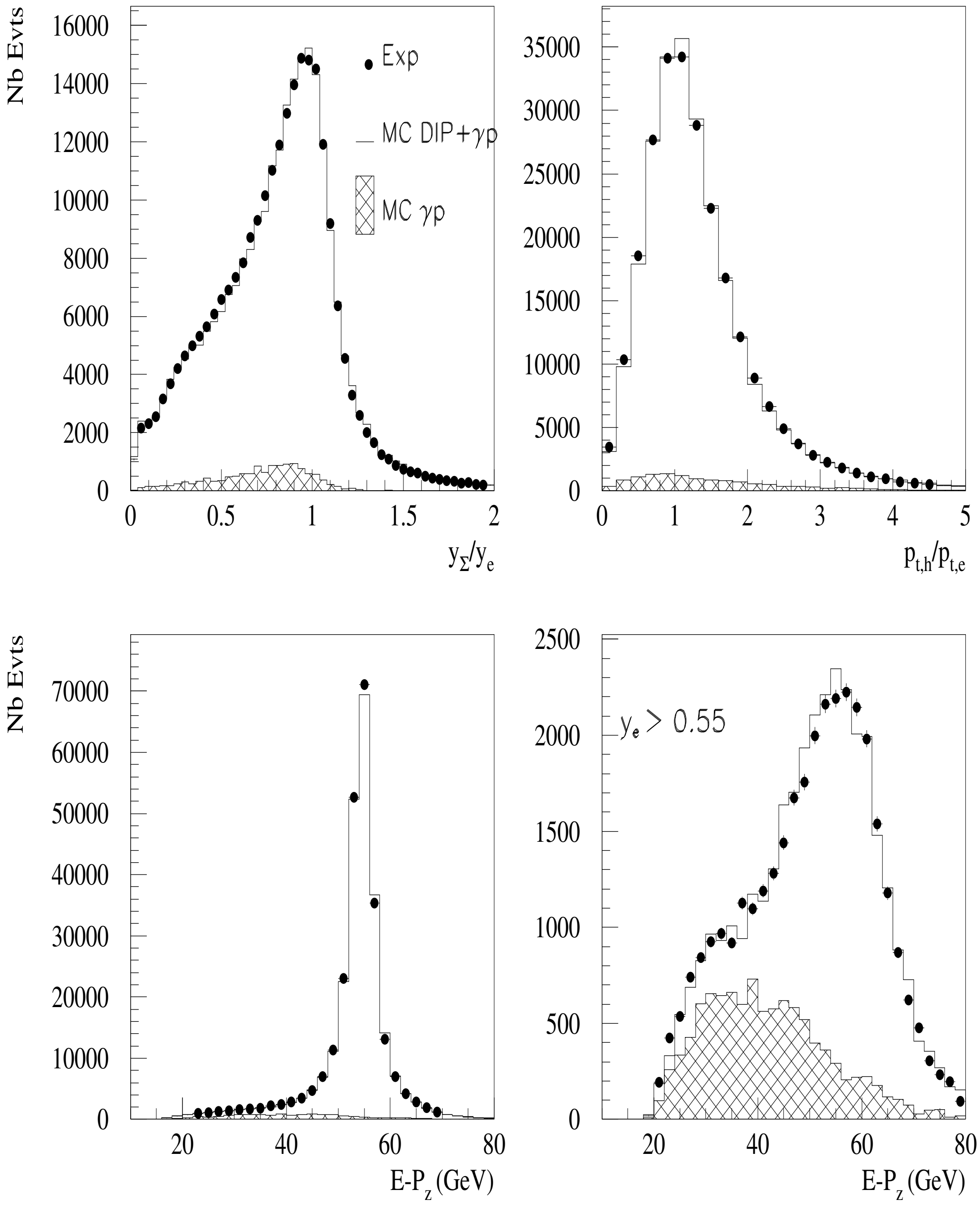


FIG. 6.30 – *Distributions des rapports* y_Σ/y_e *et* $p_{t,h}/p_{t,e}$ *et distributions en* $E - P_z$ *- pour tout le domaine cinématique accessible en y puis pour le domaine des grands y* ($y_e > 0.55$)*-.*

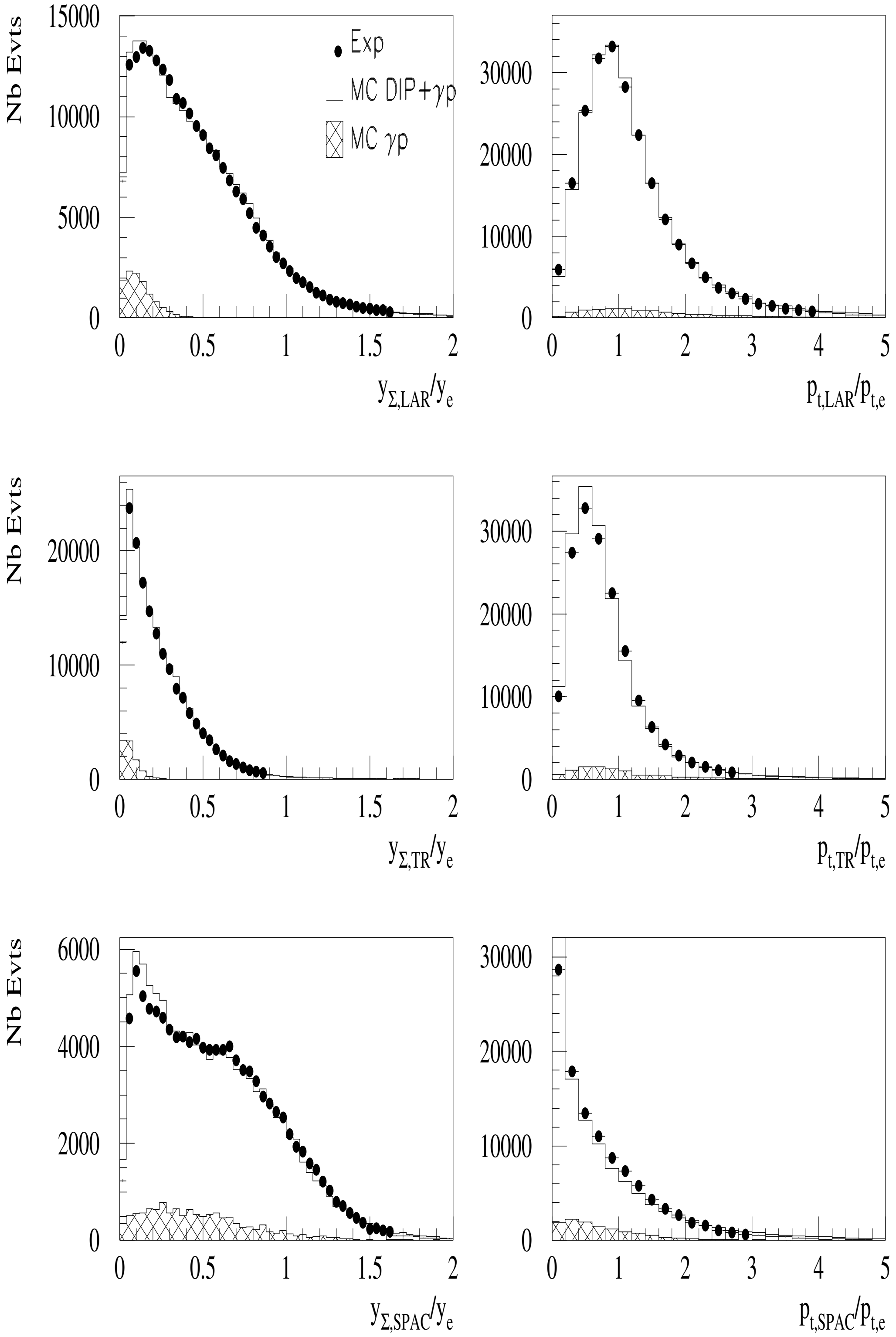


FIG. 6.31 – *Distributions y_Σ/y_e et $p_{t,h}/p_{t,e}$ dans les cas où la somme sur l'état final hadronique est réalisée sous-détecteur par sous-détecteur (voir texte).*

Bibliographie

[1] S.Bentvelsen, J.Engelen, P.Kooijman, K.C.Hoeger *Proceedings of the HERA Worshop* (1991).

[2] U.Bassler, G.Bernardi, *Nucl.Inst.Meth.* **A 361** (1995) 197.

[3] F.Jacquet, A.Blondel, *DESY-79/48* (1979).

[4] H1 Collaboration, I. Abt et al., *Nucl. Phys.* B407 (1993) 515.

[5] U. Bassler, *Thèse de doctorat* (1993).

[6] H1 Collaboration, S. Abt et al., *DESY-93/103* (1993).

[7] R. Brun et al., *CERN-DD/ee 84-1* (1987).

[8] G.A.Schuler, H.Spiesberger, *Proccedings of the Workshop Physics at HERA* (1992).

[9] R.Engel, J.Ranft, *Phys.Rev.* **D 54** (1996) 4244.

[10] A.Kwiatkowsky, H.Spiesberger, H.J.Möhring, *Comp.Phys.Comm.* **69** (1992) 155.

[11] G.Ingelman, *Proccedings of the Workshop Physics at HERA* (1992).

[12] H. Plothow-Besh, "User's Manual", *CERN W5051.*

[13] M. Glück, E. Reya, A. Vogt, *Zeit. Phys.* **C 67** (1995) 433.

[14] L. Lönnblad, *Comp. Phys. Comm.*, **71** (1992) 15.

[15] H1 Collaboration, I. Abt et al., *Zeit. Phys.* **C 59** (1994) 377.

[16] T.Sjöstrand, M.Bengtsson, *Comp.Phys.Comm.* **43** (1987) 367; *Comp.Phys.Comm.* **46** (1987) 43.

[17] I. Abt, *Note H1 05/93-290* (1993).

[18] P.Verrecchia, *Note H1 H1-09/95-456* (1995).

[19] A.Meyer, *Note H1 H1-08/96-477* (1996).

Chapitre 7

MESURE DE LA FONCTION DE STRUCTURE DU PROTON $F_2(x, Q^2)$

Les études menées dans le chapitre précédent nous ont permis d'obtenir une bonne compréhension des différents sous-détecteurs pertinents pour l'identification du candidat électron diffusé dans SPACAL et pour la mesure de l'état final hadronique. Nous prolongeons maintenant notre analyse vers l'obtention de la fonction de structure F_2. Dans ce chapitre, nous dévelopons la méthode de mesure de F_2 que nous adoptons, ainsi que toutes les analyses qui lui sont reliées. Nous définissons dans ce sens les domaines cinématiques pour lesquels F_2 peut être determinée après une étude quantitative des taux de migration. Nous discutons le calcul des efficacités associées aux coupures de sélection des événements de DIP ; ensuite, nous analysons l'ensemble des erreurs systématiques à la lumière des résultats qui ont été déduits au chapitre précédent. Finalement, nous présentons les mesures de F_2 que nous dérivons de ces études.

Notre analyse expérimentale nous permet alors alors d'étudier la transition entre les régimes non-perturbatif et perturbatif de la QCD. De plus, la précision de nos résultats à bas x pour 1.5 GeV $^2Q^2 < 6.5$ GeV ^{2} s'avère très intéressante pour étudier le comportement de F_2 à bas x, en discriminant la dynamique qui gouverne l'évolution QCD dans ce domaine cinématique. Nous présentons finalement une analyse QCD de nos nouvelles mesures et nous réalisons une détermination précise de la densité de gluons à bas x ($x < 0.01$) par la procédure d'ajustements QCD.

7.1 Définition

Nous avons montré au chapitre 2 que la section efficace de diffusion inélastique profonde (DIP) du processus $e + p \to e + X$ est définie comme suit :

$$\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2}{xQ^4}(1 + (1-y)^2)F_2(x, Q^2)(1 + \delta_{F_L})(1 + \delta_{Z^0})(1 + \delta_r) \qquad (7.1)$$

où F_2 est la fonction de structure que nous cherchons à mesurer et où δ_{F_L},δ_{Z^0} et δ_r sont des termes supplémentaires qui interviennent dans le calcul de la section efficace différentielle ci-dessus ; ces termes sont généralement petits devant l'unité et peuvent ainsi être appelés termes correctifs, on distingue :

- δ_{F_L}, qui correspond à la fraction non mesurée de $\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2}$ et qui provient de la photo-absorbtion de photons longitudinaux (σ_L) ; cette correction est calculée en QCD perturbative.

- δ_{Z^0}, qui représente la contribution du boson virtuel Z^0 échangé ; cette correction est négligeable pour les valeurs de Q^2 inférieures à 25 GeV ^{2} qui nous intéressent ici.

- δ_r, qui est une correction radiative dominée par les processus d'émission de photons réels par l'électron incident ou diffusé :

$$\frac{1}{1+\delta_r} = \frac{nombre\ d'\acute{e}v\acute{e}nements\ DIP\ g\acute{e}n\acute{e}r\acute{e}s\ (\ MC\ Born\ )}{nombre\ d'\acute{e}v\acute{e}nements\ DIP\ g\acute{e}n\acute{e}r\acute{e}s\ (\ MC\ Born\ +\ Radiatif\ )} \tag{7.2}$$

7.2 Déduction de la section efficace différentielle mesurée

Expérimentalement, nous pouvons déterminer le nombre d'événements contenus dans un domaine cinématique de centre (x_c, Q_c^2) et de dimension $(\Delta x, \Delta Q^2)$ et qui satisfont les conditions de notre sélection DIP, soit N_{Exp}. Alors le nombre d'événements de DIP est évalué comme suit :

$$N_{Exp}^{(DIP)} = N_{Exp} - N_{PHO}\frac{\mathcal{L}_{Exp}}{\mathcal{L}_{PHO}} \tag{7.3}$$

où N_{PHO} est le nombre d'événements γp calculé à l'aide du MC PHOJET qui satisfont les critères de sélection DIP (voir chapitre précédent) et qui sont contenus dans le domaine considéré, $\mathcal{L}_{Exp}$ et $\mathcal{L}_{PHO}$ représentent les luminosités intégrées pour les données et pour le MC PHOJET respectivement.

On s'attend alors à ce que la section efficace évaluée pour ce domaine cinématique $(x_c \pm \frac{\Delta x}{2}, Q_c^2 \pm \frac{\Delta Q^2}{2})$, que l'on note $\mathcal{D}$, s'exprime comme suit :

$$\left(\frac{\Delta^2\sigma}{\Delta x \Delta Q^2}\right)_{\mathcal{D}} = \frac{N_{Exp}^{(DIP)}}{\mathcal{L}_{Exp}} C_{\mathcal{D}} \tag{7.4}$$

où $C_{\mathcal{D}}$ est un terme de correction dit de centre de domaine :

$$C_{\mathcal{D}} = \frac{\frac{d^2\sigma}{dxdQ^2}(x_c, Q_c^2)}{\int_{\mathcal{D}} \frac{d^2\sigma}{dxdQ^2} dx dQ^2} \tag{7.5}$$

Notons que ce terme est évalué à l'aide d'une paramétrisation MC.

Cependant, les critères de sélection DIP que nous avons appliqués pour déduire $N_{Exp}^{(DIP)}$ suppriment une partie des événements de DIP, et il nous faut évaluer cette fraction d'événements perdus pour déduire correctement la section efficace, la dernière formule est donc incomplète, l'expression correcte s'écrit :

$$\left(\frac{\Delta^2\sigma}{\Delta x \Delta Q^2}\right)_{\mathcal{D}} = \frac{N_{Exp}^{(DIP)}}{\epsilon\, \mathcal{L}_{Exp}} C_{\mathcal{D}} \tag{7.6}$$

où ϵ est égal au rapport du nombre d'événements de DIP reconstruits dans le domaine $\mathcal{D}$ après sélection par le nombre d'événements de DIP générés dans ce domaine, c'est-à-dire :

$$\epsilon = \frac{nombre\ d'\acute{e}v\acute{e}nements\ DIP\ reconstruits\ apr\grave{e}s\ coupures}{nombre\ d'\acute{e}v\acute{e}nements\ DIP\ engendr\acute{e}s} \tag{7.7}$$

ce que l'on écrit symboliquement comme suit :

$$\epsilon = \frac{N_{rec}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP)}} \tag{7.8}$$

Il est intéressant de factoriser cette identité sous la forme :

$$\epsilon = \frac{N_{rec}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{rec}^{(DIP,av.coup.)}} \frac{N_{rec}^{(DIP,av.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP)}} \tag{7.9}$$

où $N_{rec}^{(DIP,av.coup.)}$ représente le nombre d'événements reconstruits dans $\mathcal{D}$ avant l'application des coupures de sélection DIP.

On définit les notations suivantes :

$$\epsilon_{eff} = \frac{N_{rec}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{rec}^{(DIP,av.coup.)}} \tag{7.10}$$

$$\epsilon_{acc} = \frac{N_{rec}^{(DIP,av.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP)}} \tag{7.11}$$

On en déduit :

$$\epsilon = \epsilon_{eff}\epsilon_{acc}$$

On appelle alors efficacité et acceptance les termes ϵ_{eff} et ϵ_{acc} respectivement [1]. En principe, ces termes se calculent par une simulation MC, ce qui suppose que la simulation des détecteurs reproduise parfaitement les données ; cette hypothèse n'étant pas complètement réaliste, on évalue dans la pratique le terme d'efficacité à partir des données et le terme d'acceptance à partir d'une simulation MC ; nous pouvons donc réécrire les équations ci-dessus en spécifiant ces propriétés :

$$\epsilon_{eff} = \left(\frac{N_{rec}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{rec}^{(DIP,av.coup.)}}\right)_{(Exp)} \tag{7.12}$$

$$\epsilon_{acc} = \left(\frac{N_{rec}^{(DIP,av.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP)}}\right)_{(MC)} \tag{7.13}$$

---

[1] Notons qu'une autre factorisation de ϵ est possible [1] :

$$\epsilon = \frac{N_{rec}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP,ap.coup.)}} \frac{N_{gen}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP)}}$$

Elle conduit à des développements similaires à ceux que nous présentons.

La fonction de structure $F_2(x_c, Q_c^2)$ est alors évaluée en utilisant la formule (7.1) et les identités exposées ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F_2(x_c, Q_c^2) &= \kappa(x_c, Q_c^2) \left(\frac{\Delta^2 \sigma}{\Delta x \Delta Q^2} \right)_{\mathcal{D}} C_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{1 + \delta_{F_L(x_c, Q_c^2)}} \right) \left(\frac{1}{1 + \delta_r(x_c, Q_c^2)} \right) \\ &= \kappa(x_c, Q_c^2) \frac{N_{Exp}^{(DIP)}}{\epsilon_{eff}\ \epsilon_{acc}\ \mathcal{L}_{Exp}} C_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{1 + \delta_{F_L(x_c, Q_c^2)}} \right) \left(\frac{1}{1 + \delta_r(x_c, Q_c^2)} \right) \end{aligned} \tag{7.14}$$

où κ est une fonction des variables cinématiques :

$$\kappa(x_c, Q_c^2) = \frac{1}{\frac{2\pi\alpha^2}{x_c Q_c^4}(1 + (1 - y_c)^2)} \tag{7.15}$$

Dans l'équation (7.14), nous trouvons également les termes correctifs δ_{F_L} et δ_r que nous avons introduits en présentant la formule (7.1), de même que $C_{\mathcal{D}}$ et le terme d'acceptance (ϵ_{acc}), ces derniers se calculent à l'aide d'une simulation MC.

Il est intéressant de réexprimer l'équation (7.14) en indiquant les éléments qui sont évalués par une simulation MC et ceux qui sont déduits de l'expérience, on obtient :

$$\begin{aligned} F_2^{(Exp)}(x_c, Q_c^2) &= \kappa(x_c, Q_c^2) \frac{N_{Exp}^{(DIP)}}{(\epsilon_{eff})_{(Exp)}\ (\epsilon_{acc})_{(MC)}\ \mathcal{L}_{Exp}} (C_{\mathcal{D}})_{(MC)} \\ & \left(\frac{1}{1 + \delta_{F_L(x_c, Q_c^2)}} \right)_{(MC)} \left(\frac{1}{1 + \delta_r(x_c, Q_c^2)} \right)_{(MC)} \end{aligned} \tag{7.16}$$

Ecrivons maintenant l'expression de $F_2(x_c, Q_c^2)$ (7.16), non plus à partir du nombre d'événements de DIP expérimentaux $N_{Exp}^{(DIP)}$ (voir équation (7.3)), mais à partir du nombre d'événements de DIP obtenus par une simulation MC (DJANGO) :

$$N_{MC}^{(DIP)} = N_{DJANGO} \tag{7.17}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} F_2^{(MC)}(x_c, Q_c^2) &= \kappa(x_c, Q_c^2) \frac{N_{MC}^{(DIP)}}{(\epsilon_{eff})_{(MC)}\ (\epsilon_{acc})_{(MC)}\ \mathcal{L}_{DJANGO}} (C_{\mathcal{D}})_{(MC)} \\ & \left(\frac{1}{1 + \delta_{F_L(x_c, Q_c^2)}} \right)_{(MC)} \left(\frac{1}{1 + \delta_r(x_c, Q_c^2)} \right)_{(MC)} \end{aligned} \tag{7.18}$$

Le rapport des expressions (7.16) et (7.18) donne :

$$\begin{aligned} F_2^{(Exp)}(x_c, Q_c^2) &= F_2^{(MC)}(x_c, Q_c^2) \frac{\frac{N_{Exp}^{(DIP)}}{(\epsilon_{eff})_{(Exp)}\ \mathcal{L}_{Exp}}}{\frac{N_{MC}^{(DIP)}}{(\epsilon_{eff})_{(MC)}\ \mathcal{L}_{DJANGO}}} \\ &= F_2^{(MC)}(x_c, Q_c^2) \frac{N_{Exp}^{(DIP)}}{N_{MC}^{(DIP)}} \frac{\mathcal{L}_{DJANGO}}{\mathcal{L}_{Exp}} \frac{(\epsilon_{eff})_{(MC)}}{(\epsilon_{eff})_{(Exp)}} \end{aligned} \tag{7.19}$$

On rappelle :

$$\begin{aligned}
N_{Exp}^{(DIP)} &= N_{Exp} - N_{PHO}\frac{\mathcal{L}_{Exp}}{\mathcal{L}_{PHO}} \\
N_{MC}^{(DIP)} &= N_{DJANGO} \\
(\epsilon_{eff})_{(Exp)} &= \frac{N_{Exp}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{Exp}^{(DIP,av.coup.)}} \\
(\epsilon_{eff})_{(MC)} &= \frac{N_{MC}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{MC}^{(DIP,av.coup.)}} \qquad (7.20)
\end{aligned}$$

La valeur de $F_2^{(MC)}(x_c, Q_c^2)$ étant connue, pour déterminer $F_2^{(Exp)}(x_c, Q_c^2)$, il reste à évaluer les quatre quantités ci-dessus pour le domaine cinématique $\mathcal{D}$ considéré ; notons que le calcul de ces quantités n'a de sens que si le domaine $\mathcal{D}$ présente certaines propriétés de stabilité et de pureté que nous exposons dans le prochain paragraphe.

7.3 Sélection des domaines cinématiques et étude des migrations

La sélection des domaines cinématiques repose dans un premier temps sur deux principes qui définissent l'extension cinématique de chaque domaine :

- Il s'agit de minimiser les effets de migrations[2] dûs à la résolution des détecteurs et aux incertitudes liées aux différentes méthodes de reconstruction des variables cinématiques ; pour un domaine donné, la résolution de chaque variable cinématique doit ainsi être inférieure à l'extension cinématique du domaine.
- Chaque domaine doit de plus contenir un nombre suffisant d'événements pour que les erreurs statistiques restent faibles.

Ces premières conditions définissent une liste de domaines $\mathcal{D}_i$ que nous avons choisi de repérer en fonction des variables x et Q^2 ; la fig. 7.1 représente l'ensemble des domaines ainsi définis, la fig. 7.2(a) donne le nombre d'événements expérimentaux reconstruits -après sélection DIP- dans chaque domaine avec la méthode électron et la fig. 7.2(b) donne le nombre d'événements expérimentaux reconstruits -après sélection DIP- dans chaque domaine avec la méthode sigma.

Dans un deuxième temps, nous introduisons d'autres critères pour sélectionner les domaines définis précédemment. Ces nouvelles conditions sont fondées sur le contrôle des migrations et dépendent de la méthode de reconstruction cinématique adoptée ; nous devons donc estimer les taux de migrations entre domaines pour

---

[2] On parle de migration lorsqu'un événement se produisant avec le couple de variables cinématiques (x, Q^2) appartenant à un domaine $\mathcal{D}$ est reconstruit en (x', Q'^2) inclus dans $\mathcal{D}'$ (différent de $\mathcal{D}$).

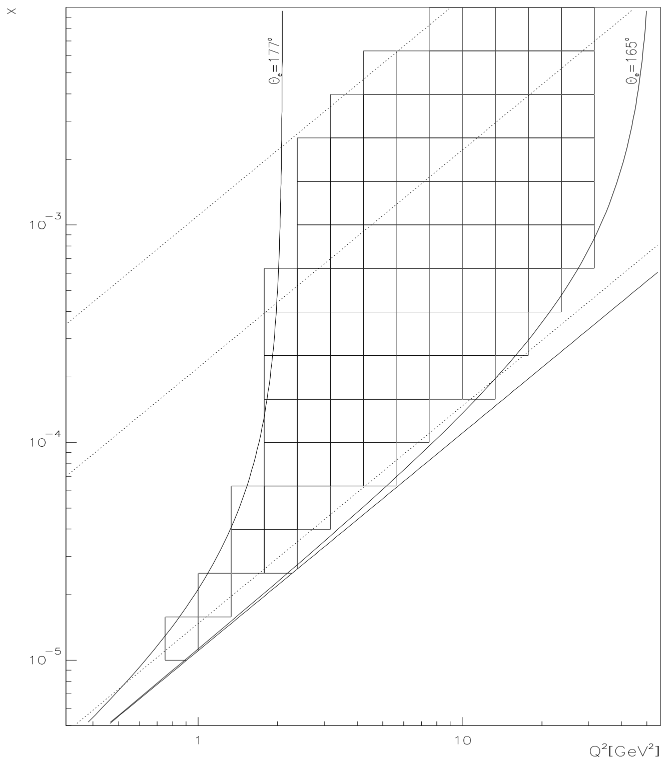


FIG. 7.1 – *Domaines cinématiques sélectionnés.*

chaque méthode (électron et sigma), notons que cette étude est réalisée à partir du MC DIP (DJANGO). On distingue trois estimateurs pour évaluer les migrations :

- *L'acceptance* ; nous avons déjà introduit cette quantité :

$$\epsilon_{acc} = \frac{N_{rec}^{(DIP,av.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP)}} \tag{7.21}$$

Si les coupures de sélection DIP ne modifient pas les différents flux de migrations entre les domaines cinématiques -ce que nous vérifions par la suite-, l'acceptance définie ci-dessus doit vérifier la propriété :

$$\begin{aligned} \epsilon_{acc} &= \frac{N_{rec}^{(DIP,av.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP)}} \\ &= \frac{N_{rec}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP,ap.coup.)}} \end{aligned} \tag{7.22}$$

C'est l'hypothèse de factorisation, la différence entre les expressions évaluées avant ou après coupures de sélection DIP devant être considérée comme une incertitude systématique[3].

---

[3] Dans une note précédente, nous avons indiqué que le terme ϵ peut également être décomposé

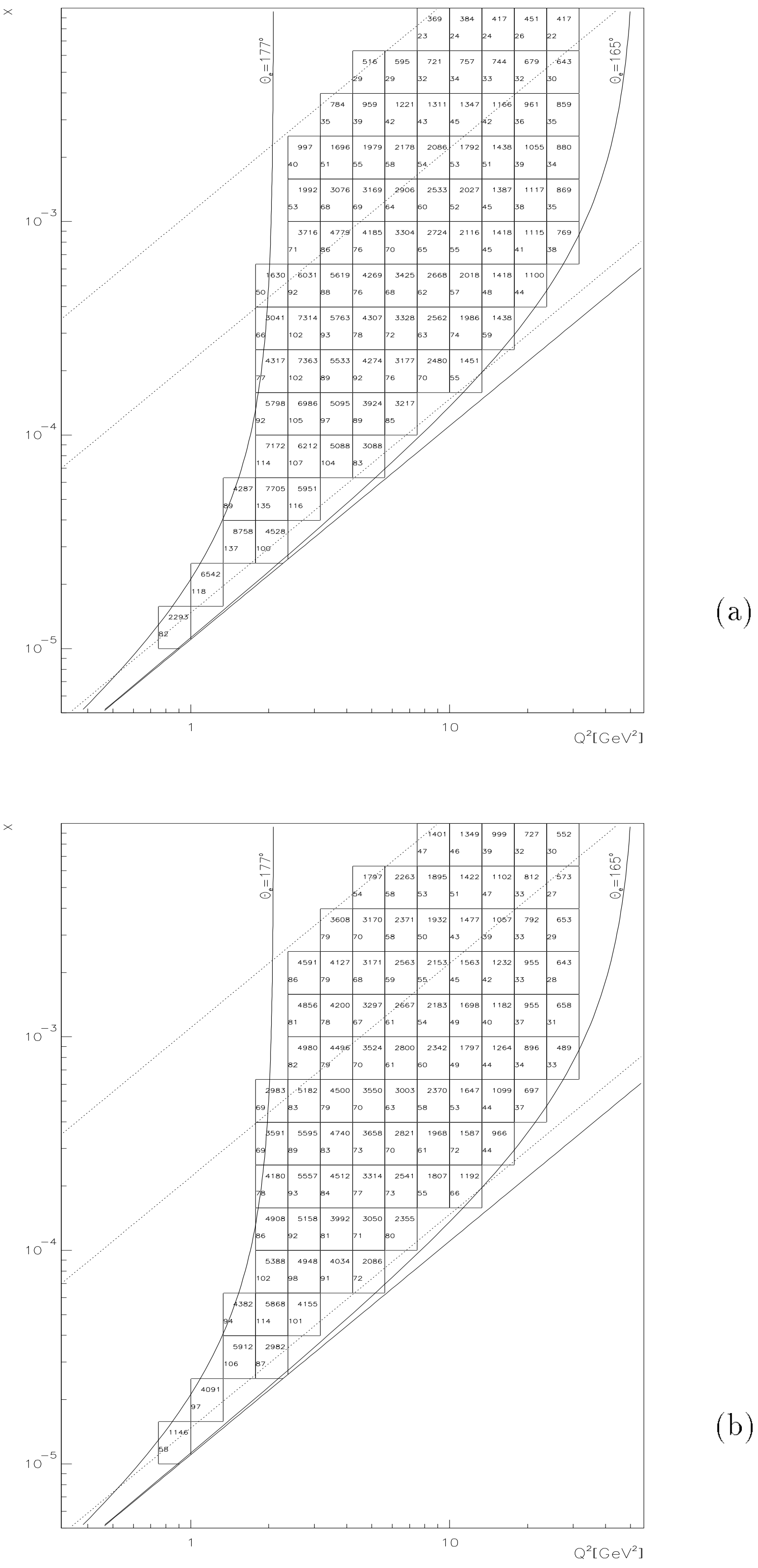


FIG. 7.2 – *Nombre d'événements expérimentaux reconstruits dans les différents domaines cinématiques, pour la méthode électron (a) et pour la méthode sigma (b).*

L'acceptance permet donc de caractériser les migrations de manière globale, mais elle ne permet pas de déterminer si les migrations qu'elle met en évidence traduisent des flux vers ou à partir du domaine cinématique considéré.

Deux autres estimateurs nous donnent accès à cette information.

- *La stabilité*; la stabilité est définie, pour un domaine donné, par le rapport du nombre d'événements qui restent dans ce domaine après reconstruction cinématique par le nombre d'événements générés :

$$\epsilon_{sta} = \frac{N_{rec}^{(DIP,reste)}}{N_{gen}^{(DIP)}} \tag{7.23}$$

  La stabilité caractérise les migrations du domaine considéré vers les autres domaines.

- *La pureté*; la pureté est définie, pour un domaine donné, par le rapport du nombre d'événements qui restent dans ce domaine après reconstruction cinématique par le nombre d'événements reconstruits :

$$\epsilon_{pur} = \frac{N_{rec}^{(DIP,reste)}}{N_{rec}^{(DIP)}} \tag{7.24}$$

  La pureté caractérise les migrations vers le domaine considéré à partir des autres domaines.

Nous pouvons ainsi définir de nouvelles conditions qui caractérisent un domaine donné $\mathcal{D}$ en estimant les taux de migrations pour ce dernier ; nous sélectionnons les domaines qui vérifient les conditions suivantes :

- une condition sur la stabilité :

$$(\epsilon_{sta})_{\mathcal{D}} \geq 0.4 \tag{7.25}$$

- une condition sur la pureté :

$$(\epsilon_{pur})_{\mathcal{D}} \geq 0.4 \tag{7.26}$$

De plus, nous devons vérifier si les trois estimateurs précédents peuvent être calculés de façon équivalente après ou avant coupures de sélection DIP.

---

comme suit :

$$\epsilon = \frac{N_{rec}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP,ap.coup.)}} \frac{N_{gen}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP)}}$$

Dans ce cas, l'hypothèse de factorisation s'écrit [1] :

$$\frac{N_{gen}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP)}} = \frac{N_{rec}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{rec}^{(DIP)}}$$

ce qui correspond à la même identité que l'équation (7.22) :

$$\frac{N_{rec}^{(DIP,av.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP)}} = \frac{N_{rec}^{(DIP,ap.coup.)}}{N_{gen}^{(DIP,ap.coup.)}}$$

Les deux décompositions sont donc équivalentes pour l'analyse expérimentale.

Calcul de l'acceptance

Il s'agit d'évaluer les estimateurs définis précédemment ainsi que leurs incertitudes statistiques ; une difficulté provient du fait que le MC que nous utilisons (DJANGO) est un MC pondéré, c'est-à-dire que chaque événement (i) est affecté d'un poids (W_i).

Nous avons montré que l'on peut exprimer avec intérêt l'acceptance comme suit [2] :

$$A = \frac{N^{(DIP,reste)} + N^{(DIP,vient)}}{N^{(DIP,reste)} + N^{(DIP,part)}} = \frac{\sum_i W_i + \sum_j W_j}{\sum_i W_i + \sum_k W_k} \tag{7.27}$$

où nous avons décomposé la contribution des événements qui restent dans le domaine considéré ($N^{(DIP,reste)}$), qui y viennent ($N^{(DIP,vient)}$) et qui en partent ($N^{(DIP,part)}$) ; notons que :

$$\begin{aligned} a &= N_{rec}^{(DIP)} = N^{(DIP,reste)} + N^{(DIP,vient)} \\ b &= N_{gen}^{(DIP)} = N^{(DIP,reste)} + N^{(DIP,part)} \end{aligned}$$

Alors, la variance de l'acceptance devient [2] :

$$\sigma_A^2 = (\frac{b-a}{b^2})^2 \sum_i {W_i}^2 + \frac{1}{b^2} \sum_j {W_j}^2 + (\frac{-a}{b^2})^2 \sum_k {W_k}^2 \tag{7.28}$$

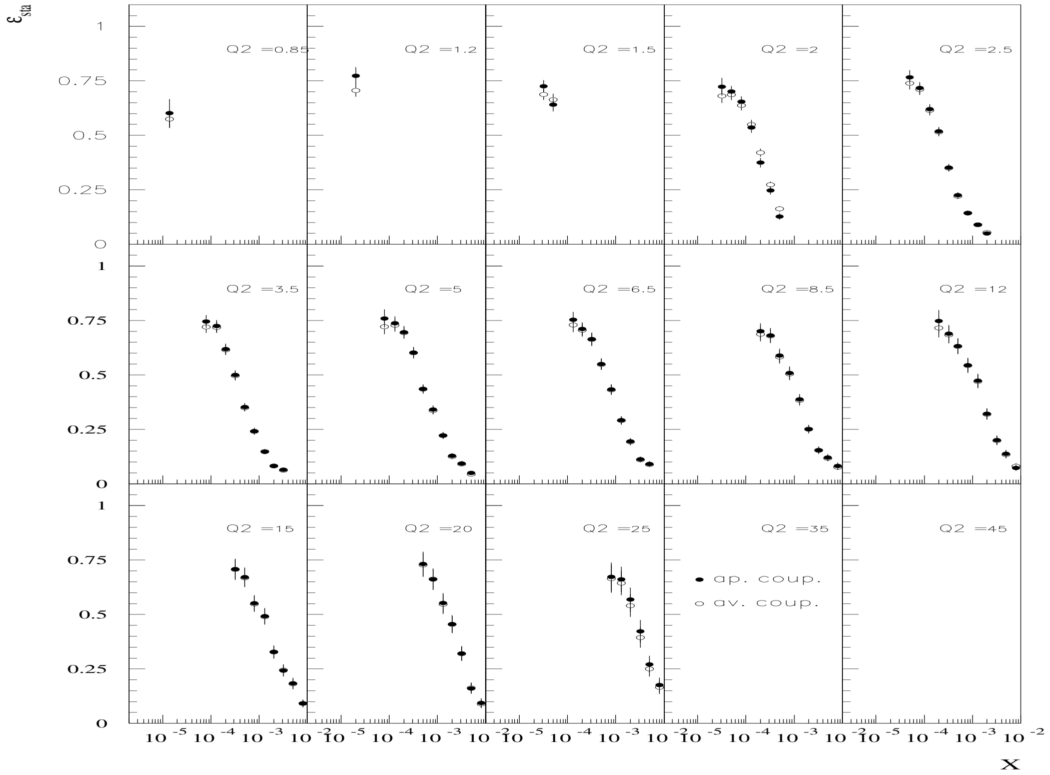
On donne en appendice à ce chapitre la démonstration de cette formule. Un raisonnement similaire peut être développé pour le calcul de la pureté et de la stabilité.

Résultats

Les valeurs de la stabilité et de la pureté sont présentées sur les fig. 7.3 et 7.4 respectivement, pour les méthodes électron et sigma, lorsque ces estimateurs sont évalués avant ou après l'application des coupures de sélection DIP. Ces deux figures nous permettent ensuite de réaliser la sélection des domaines cinématiques moyennant les deux conditions énoncées plus haut. Pour les domaines sélectionnés, l'acceptance est présentée sur la fig. 7.5.

Nous constatons le bon accord des valeurs obtenues -avant et après coupures- pour les trois estimateurs, dans les domaines cinématiques sélectionnés ; l'erreur introduite par l'hypothèse de factorisation est ainsi négligeable.

La fig. 7.5 présente également un caractère intéressant ; on remarque en effet que l'acceptance évaluée avec la méthode électron tend à diminuer -faiblement- quand x augmente : cet effet est la conséquence de la migration des événements générés dans le pic cinématique, qui sont reconstruits à plus basse énergie.


(A) Méthode électron

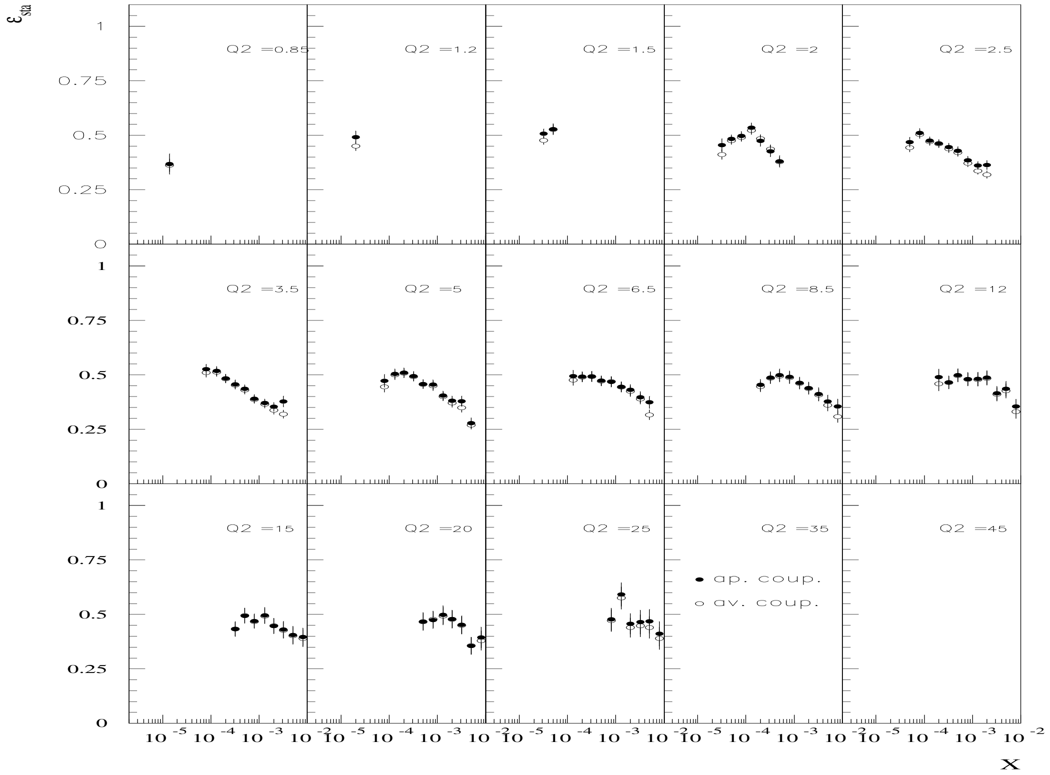
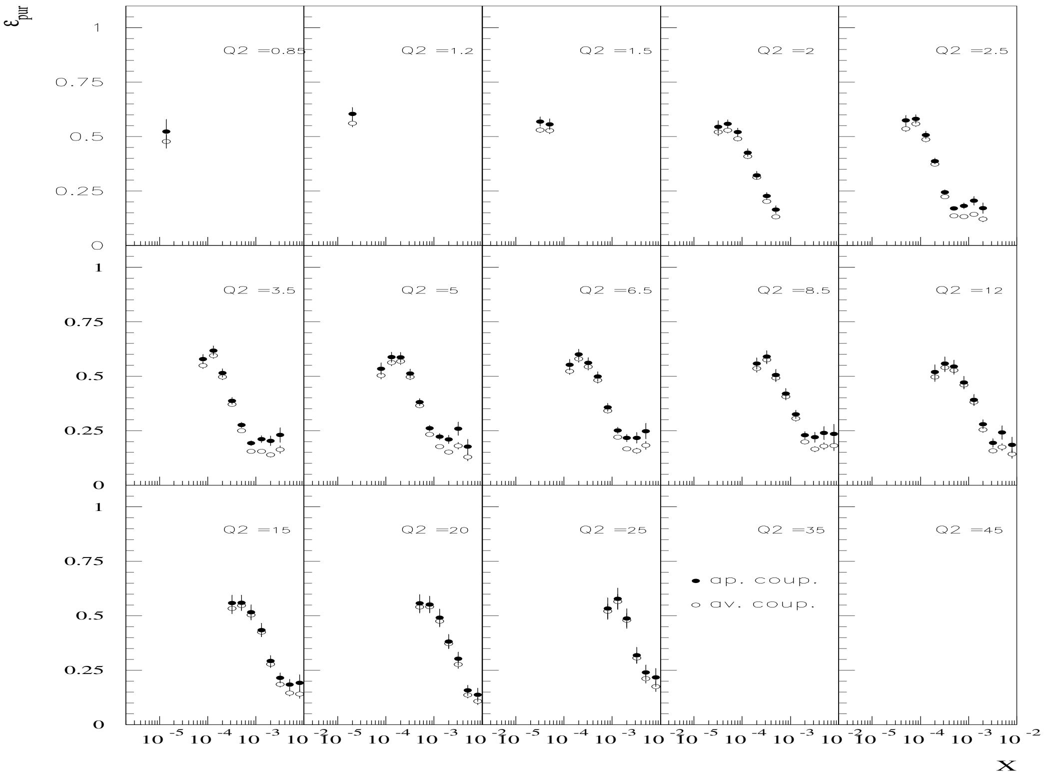

(B) Méthode sigma

FIG. 7.3 – *Stabilité* ($\epsilon_{sta} = \frac{N_{rec}^{(DIP,reste)}}{N_{gen}^{(DIP)}}$) *des domaines cinématiques définis sur la fig. 7.1.*

(A) Méthode électron



(B) Méthode sigma

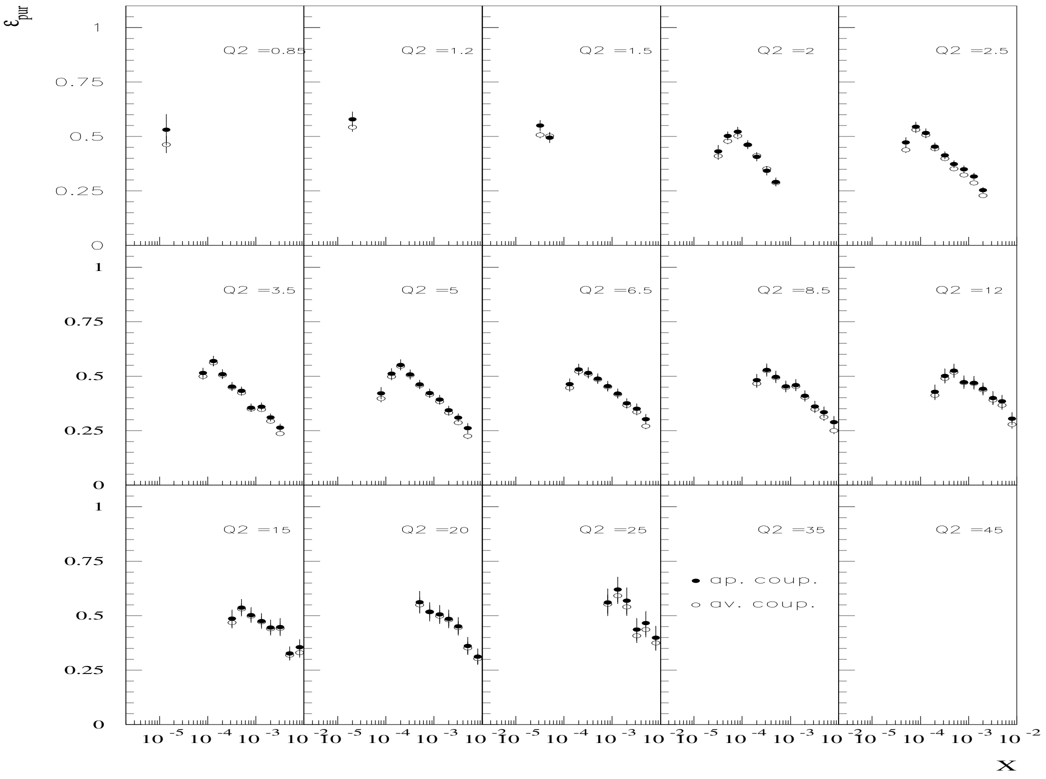
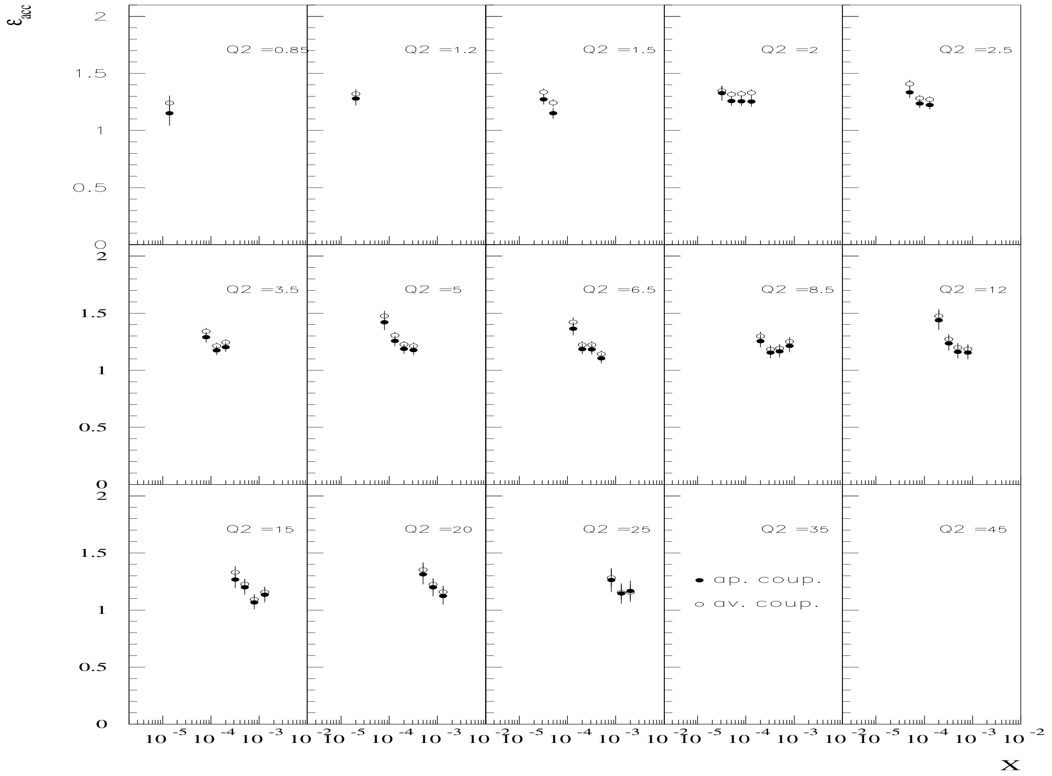


FIG. 7.4 – *Pureté* ($\epsilon_{pur} = \frac{N_{rec}^{(DIP,reste)}}{N_{rec}^{(DIP)}}$) *des domaines cinématiques définis sur la fig. 7.1.*

(A) Méthode électron



(B) Méthode sigma

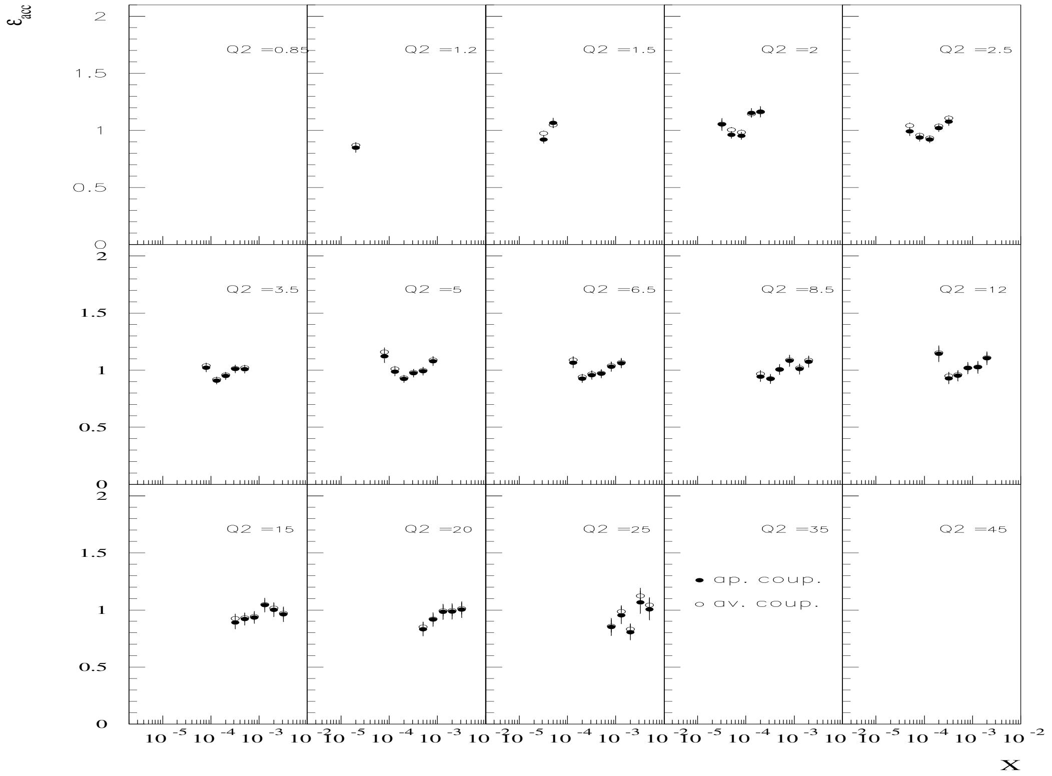


FIG. 7.5 – *Acceptance* ($\epsilon_{acc} = \frac{N_{rec}^{(DIP)}}{N_{gen}^{(DIP)}}$) *des domaines cinématiques sélectionnés :* $(\epsilon_{sta})_{\mathcal{D}} \geq 0.4$, $(\epsilon_{pur})_{\mathcal{D}} \geq 0.4$

7.4 Calcul des efficacités

Rappelons que :

$$\begin{aligned} F_2^{(Exp)}(x_c,Q_c^2) &= F_2^{(MC)}(x_c,Q_c^2)\frac{\frac{N_{Exp}^{(DIP)}}{(\epsilon_{eff})_{(Exp)}\ \mathcal{L}_{Exp}}}{\frac{N_{MC}^{(DIP)}}{(\epsilon_{eff})_{(MC)}\ \mathcal{L}_{DJANGO}}} \\ &= F_2^{(MC)}(x_c,Q_c^2)\frac{N_{Exp}^{(DIP)}}{N_{MC}^{(DIP)}}\frac{\mathcal{L}_{DJANGO}}{\mathcal{L}_{Exp}}\frac{(\epsilon_{eff})_{(MC)}}{(\epsilon_{eff})_{(Exp)}} \end{aligned} \tag{7.29}$$

Au paragraphe précédent, nous avons défini les domaines cinématiques où la détermination de $F_2^{(Exp)}(x_c,Q_c^2)$ peut être obtenue. La deuxième étape consiste à évaluer les efficacités $(\epsilon_{eff})_{(Exp)}$ et $(\epsilon_{eff})_{(MC)}$ qui interviennent dans la formule (7.29).

Notons que ces deux termes contribuent dans l'équation (7.29) en tant qu'un facteur multiplicatif de la forme :

$$\mathcal{F}_{eff} = \frac{(\epsilon_{eff})_{(MC)}}{(\epsilon_{eff})_{(Exp)}}$$

Il s'agit donc de comparer les efficacités évaluées au niveau expérimental et au niveau MC respectivement, puis d'estimer les désaccords éventuels qui peuvent apparaitre entre ces deux quantités.

Ainsi, pour chaque domaine cinématique, nous cherchons à calculer δ_{eff} tel que :

$$\mathcal{F}_{eff} = 1 \pm \delta_{eff}$$

Dès lors, pour la détermination de $F_2^{(Exp)}$, nous considérons δ_{eff} comme une erreur systématique (voir plus loin). Notons que $\mathcal{F}_{eff}$ ne peut pas être considéré simplement comme un terme multiplicatif, car il se pourrait que l'efficacité MC dépende des paramétrisations incluses dans ce dernier pour décrire les fonctions de stucture de DIP ; le seul traitement raisonnable consite ainsi à définir δ_{eff} comme une erreur systématique à la détermination de $F_2^{(Exp)}/F_2^{(MC)}$.

De plus, nous effectuons les comparaisons des efficacités données/MC pour chaque coupure de sélection DIP, c'est-à-dire que nous factorisons les termes d'efficacité comme suit :

$$(\epsilon_{eff})_{(Exp)} = \prod_i (\epsilon_{eff_i})_{(Exp)} \tag{7.30}$$

$$(\epsilon_{eff})_{(MC)} = \prod_i (\epsilon_{eff_i})_{(MC)} \tag{7.31}$$

où l'indice i repère les différentes coupures.

On calcule les quantités suivantes pour chaque domaine cinématique :

$$\begin{aligned} (\epsilon_{eff_i})_{(Exp)} &= \frac{N_{Exp}^{(DIP,ap.coup.i)}}{N_{Exp}^{(DIP,av.coup.i)}} \\ (\epsilon_{eff_i})_{(MC)} &= \frac{N_{MC}^{(DIP,ap.coup.i)}}{N_{MC}^{(DIP,av.coup.i)}} \end{aligned} \tag{7.32}$$

Là encore, une difficulté provient du fait que le MC est pondéré ; pour une coupure λ quelconque, on peut écrire :

$$\epsilon_{eff_\lambda} = \frac{N^{(DIP,passe\lambda)}}{N^{(DIP,passe\lambda)} + N^{(DIP,coupe\lambda)}} \tag{7.33}$$

$$= \frac{\sum_i W_i}{\sum_i W_i + \sum_j W_j} \tag{7.34}$$

$$= \frac{a}{b} \tag{7.35}$$

où nous avons décomposé la contribution des événements qui passent la coupure λ ($N^{(DIP,passe\lambda)}$, et qui sont coupés par cette dernière ($N^{(DIP,coupe\lambda)}$).

On obtient alors [2] :

$$\sigma^2_{\epsilon_{eff_\lambda}} = (\frac{b-2a}{b^3}) \sum_i {W_i}^2 + \frac{a^2}{b^4} \left(\sum_i {W_i}^2 + \sum_j {W_j}^2 \right) \tag{7.36}$$

De plus, une difficulté importante dans l'estimation des efficacités -pour les données- est liée au fait que ces quantités font intervenir des nombres d'événements de DIP, qui peuvent être contaminés par des événements de bruit de fond qui subsistent à toutes les coupures de sélection, en particulier quand on évalue le terme au dénominateur $N_{Exp}^{(DIP,av.coup.i)}$, pour lequel une coupure de sélection (notée i) est relâchée.

Cette difficulté est plus ou moins importante suivant les coupures considérées, mais, dans tous les cas, le principe général est de renforcer les coupures de sélection autre que celle dont on détermine l'efficacité, afin de restreindre le plus possible la contamination induite par le relâchement de cette coupure.

Efficacité vertex

Nous discutons ci-dessous le cas le plus difficile : la détermination de l'efficacité de la coupure sur le vertex.

Lorsque celle-ci est appliquée, nous demandons que les événements possèdent un vertex primaire reconstruit à partir d'au moins une trace centrale ou avant avec la condition :

$$|z_{nominal} - z_{vertex}| < 30cm$$

où $z_{nominal}$ repère la position longitudinale du point d'interaction nominal.

Le relâchement de cette coupure est délicate pour trois raisons :

- Elle joue un rôle important dans le rejet des interactions résiduelles qui ne présentent généralement pas de vertex reconstruit.
- La suppression de la coupure sur le vertex provoque la contamination par les paquets satellites, ce qui implique une décroissance artificielle de son efficacité.
- Le calcul des variables cinématiques est dégradé lorsque cette coupure est abandonnée ; en effet, la connaissance précise de la position longitudinale z_{vertex} -de même que la trace BDC associée au candidat électron- est essentielle à une bonne détermination de la cinématique de l'événement.

Une possibilité pour surmonter ces difficultés est alors d'utiliser les chambres CIP, qui peuvent servir, en association avec l'information BDC, à reconstruire la position longitudinale du vertex de l'événement ; cependant, l'acceptance angulaire de ces chambres correspond à des angles tels que $\theta_e \leq 170^o$ (soit $Q^2 \geq 10$ GeV ^{2}), ce qui s'accorde mal aux exigences cinématiques de notre analyse.

Nous avons donc adopté une autre stratégie.

Nous utilisons ainsi les informations du PToF (PLUG-ToF -avant-) et du ToF du SPACAL -arrière- ; le SPACAL mesure le temps de vol de l'électron et le PToF mesure le temps de vol du proton issu de l'interaction.

Dès lors, la position longitudinale du point d'interaction peut être estimée, ce qui nous permet de sélectionner les événements qui se situent à ± 30 cm de la position nominale du vertex d'interaction.

Les événements sont ainsi sélectionnés si le PToF donne un signal compris entre 35 ns et 45 ns et si le signal du ToF de la cellule la plus chaude du SPACAL est compris entre 10 ns et 15 ns.

Les résultats obtenus après ce traitement sont présentés sur la fig. 7.6, pour les méthodes électron et sigma ; les données et le MC s'accordent à mieux que 1% près.

Résultats

Les résultats concernant les efficacités des autres coupures sont présentés sur les figures qui suivent : fig. 7.7 pour l'efficacité de la coupure sur la trace BDC associée à l'amas EM, fig. 7.8 et fig. 7.9 pour les efficacités des coupures sur R_θ et E_{veto} respectivement, finalement fig. 7.10 et fig. 7.11 pour les efficacités des coupures sur R_{amas} et R_E respectivement.

On rappelle que chaque efficacité (ϵ_{eff_i}) contribue dans la détermination de $F_2^{(Exp)}$ en tant qu'un facteur multiplicatif :

$$\mathcal{F}_{eff_i} = \frac{(\epsilon_{eff_i})_{(MC)}}{(\epsilon_{eff_i})_{(Exp)}}$$

soit :

$$\mathcal{F}_{eff_i} = 1 \pm \delta_{eff_i}$$

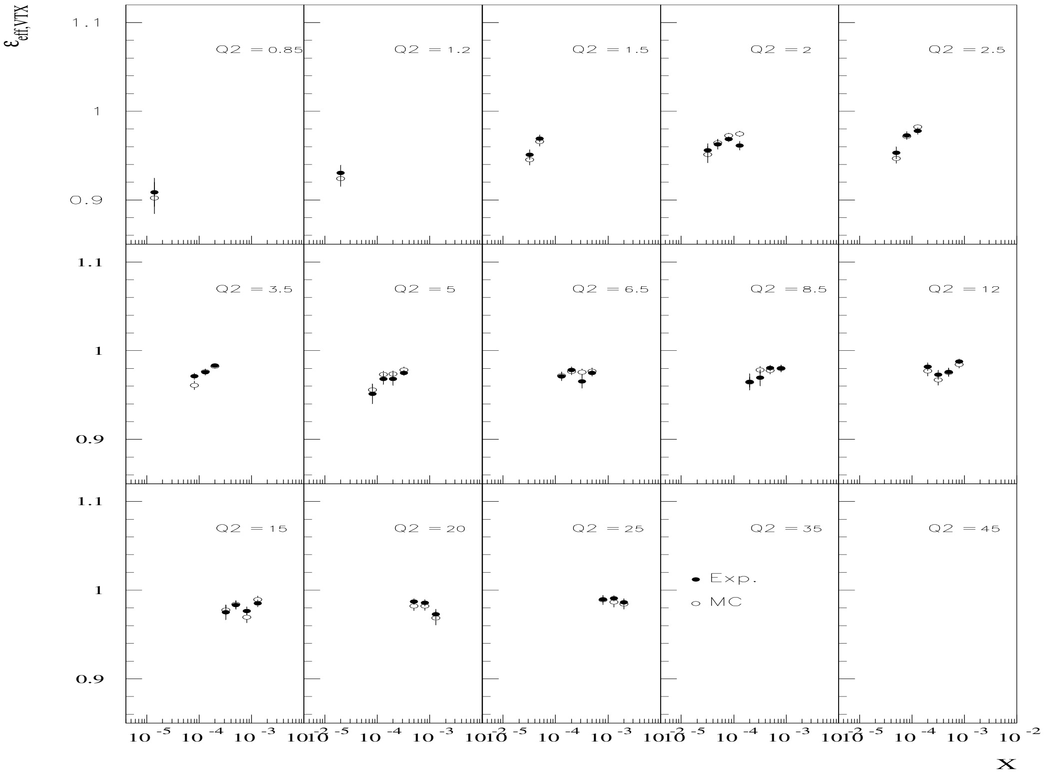
où le terme δ_{eff_i} est traité comme une erreur systématique (voir plus loin), les comparaisons données/MC que nous avons réalisées ci-dessus montrent que :

Coupure	$\delta_{eff_i}(\%)$
Vertex	1 %
BDC	1 %
R_E	2 %

les autres coupures ne présentant aucune différence significative lors des comparaisons données/MC.

Nous discutons maintenant le traitement de l'ensemble des erreurs systématiques que nous considérons, nous expliquons à cette occasion comment prendre en compte quantitativement les termes δ_{eff_i} précédents.

(A) Méthode électron



(B) Méthode sigma

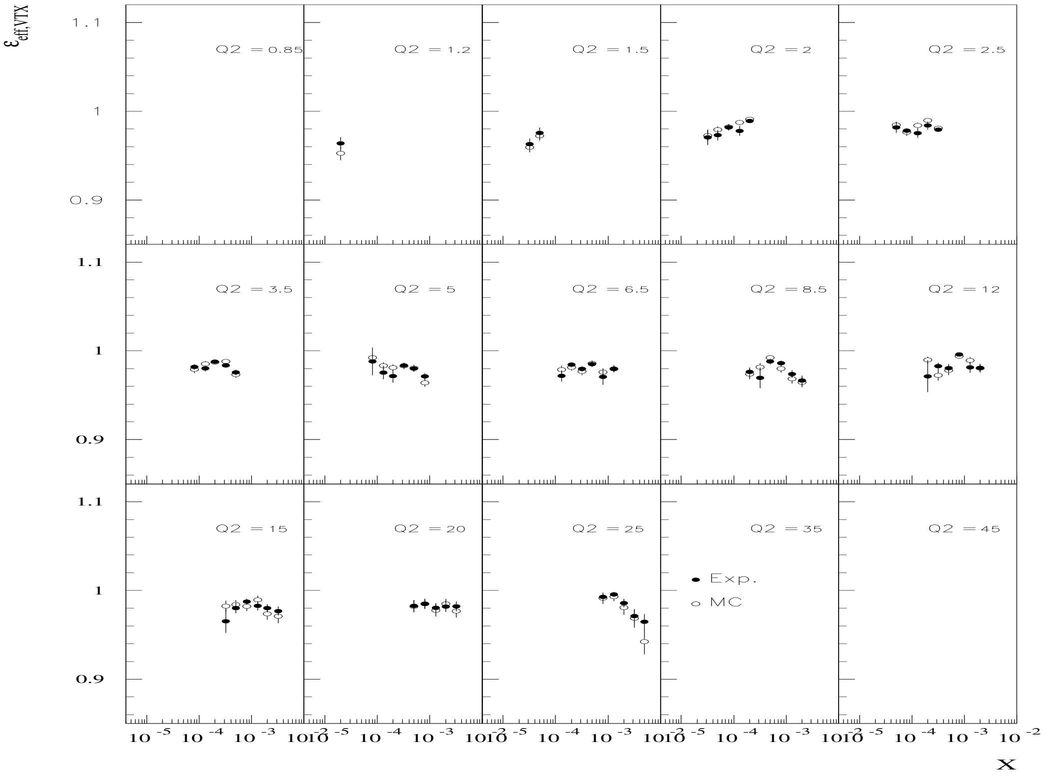
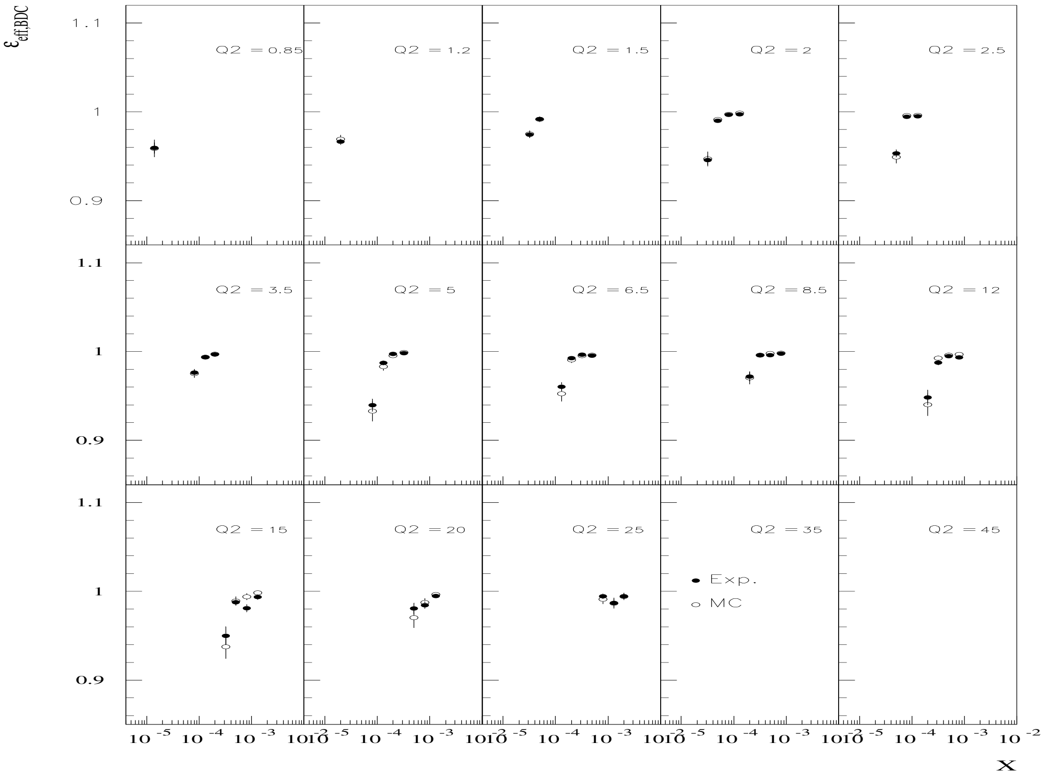


Fig. 7.6 – *Efficacité de la coupure sur le vertex; il existe un vertex primaire reconstruit à partir d'au moins une trace centrale ou avant avec la condition:* $|z_{nominal} - z_{vertex}| < 30cm$*, où* $z_{nominal}$ *repère la position longitudinale du point d'interaction nominal; (voir texte).*

(A) Méthode électron



(B) Méthode sigma

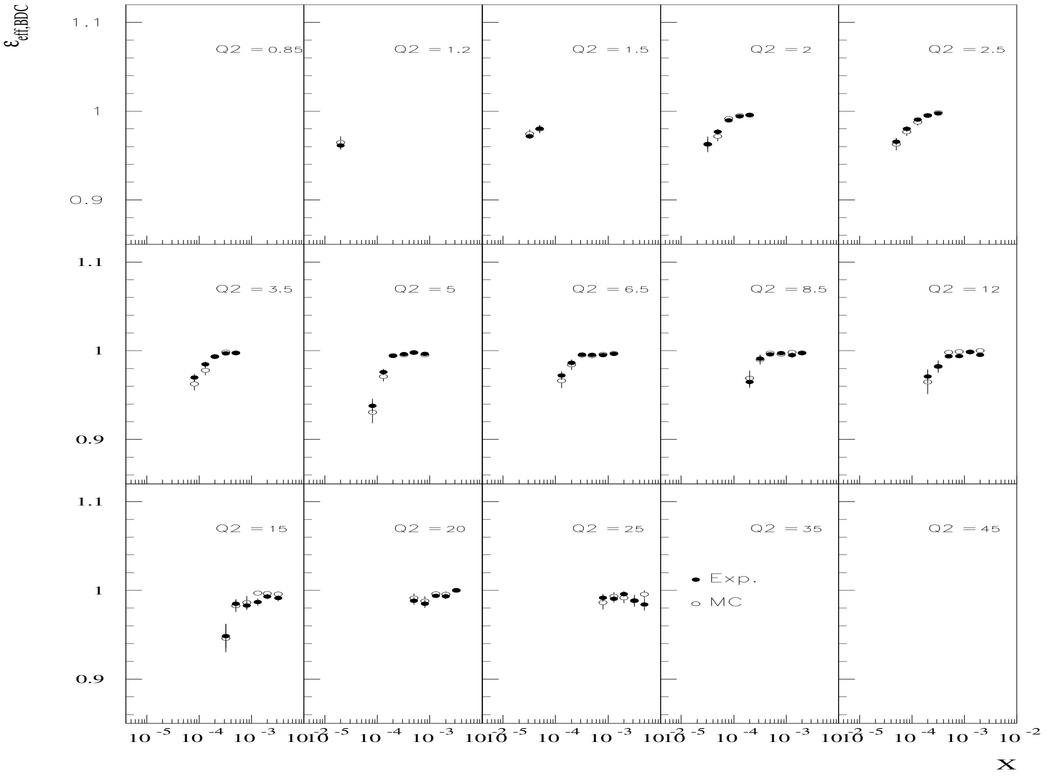
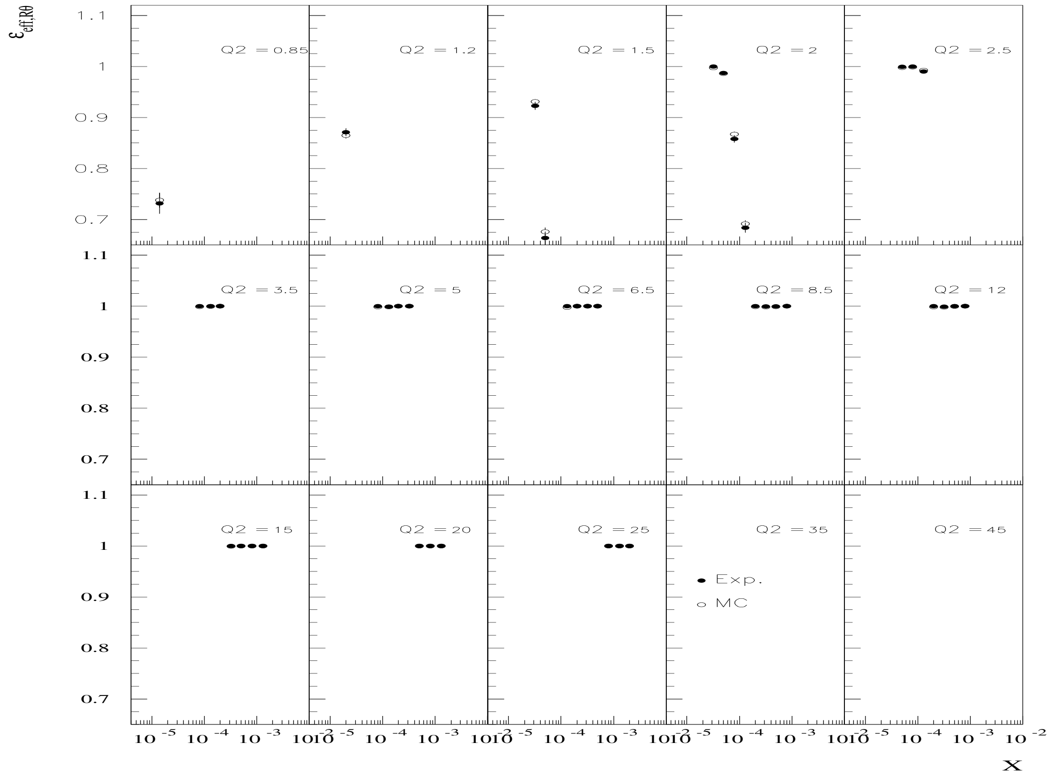


FIG. 7.7 – *Efficacité de la coupure sur la correspondance amas EM/trace BDC;* $\Delta r \leq 2cm$ *et* $r\Delta\phi \leq 2.5cm$.


(A) Méthode électron

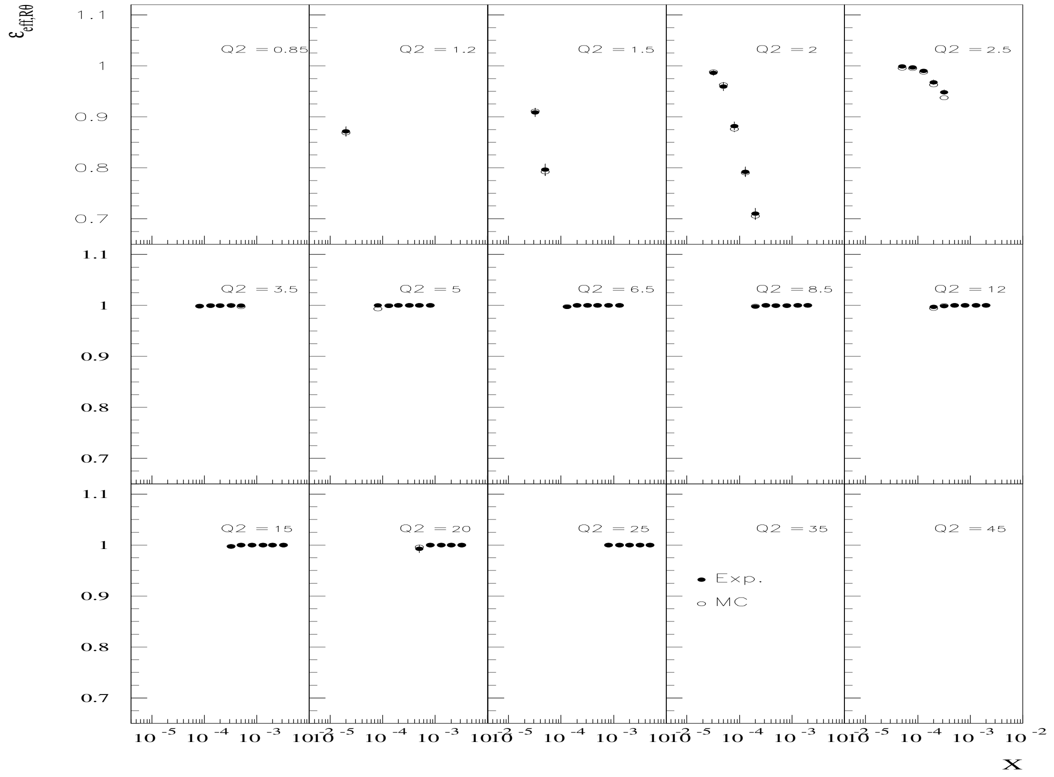
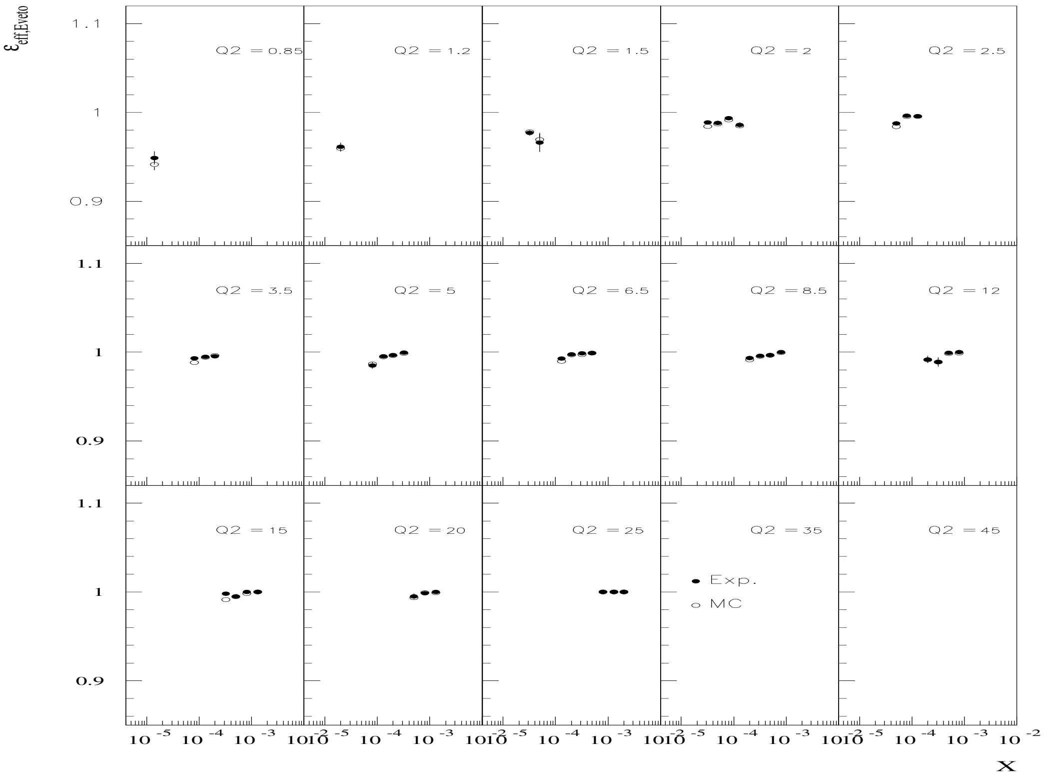

(B) Méthode sigma

FIG. 7.8 – *Efficacité de la coupure sur la position radiale du barycentre de l'amas EM; $R_\theta \geq 8.9cm$.*

(A) Méthode électron



(B) Méthode sigma

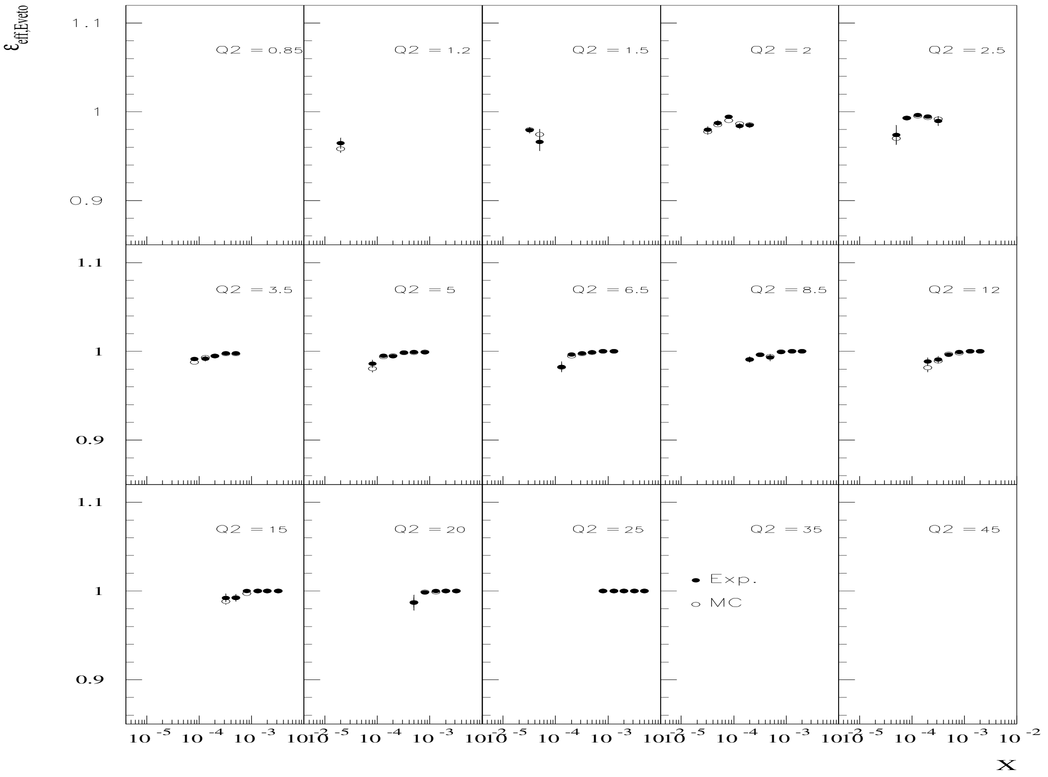
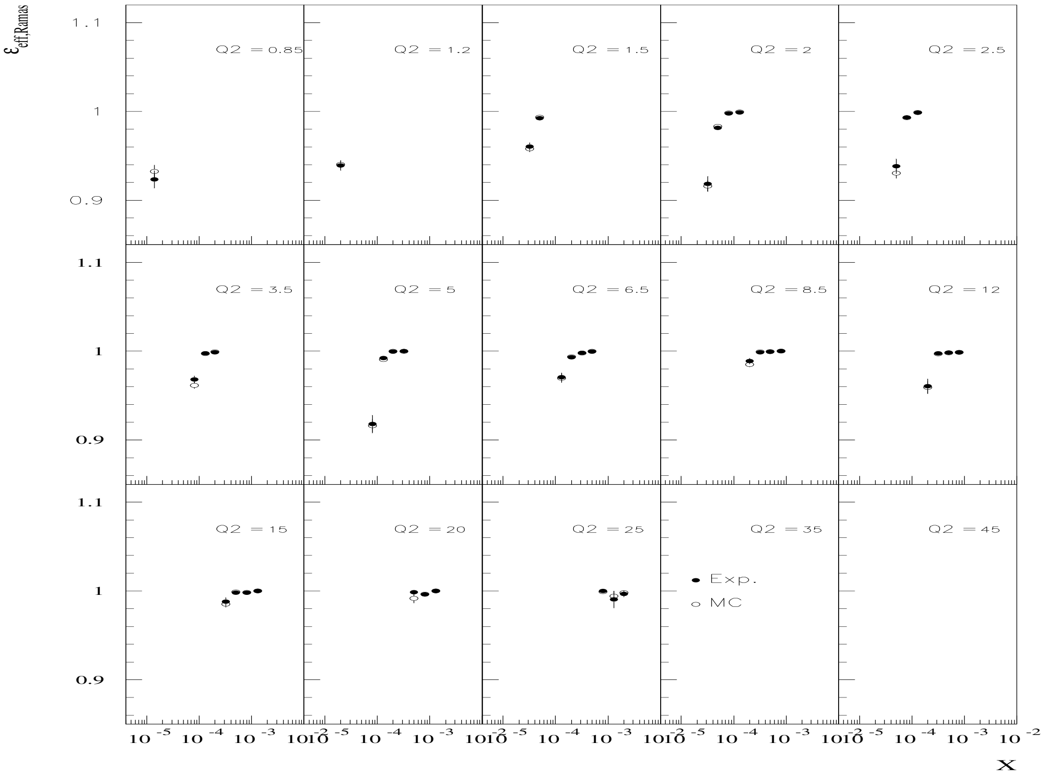


FIG. 7.9 – *Efficacité de la coupure sur l'énergie dans la couche véto du SPACAL ;* $E_{veto} \leq 1$ GeV .

(A) Méthode électron



(B) Méthode sigma

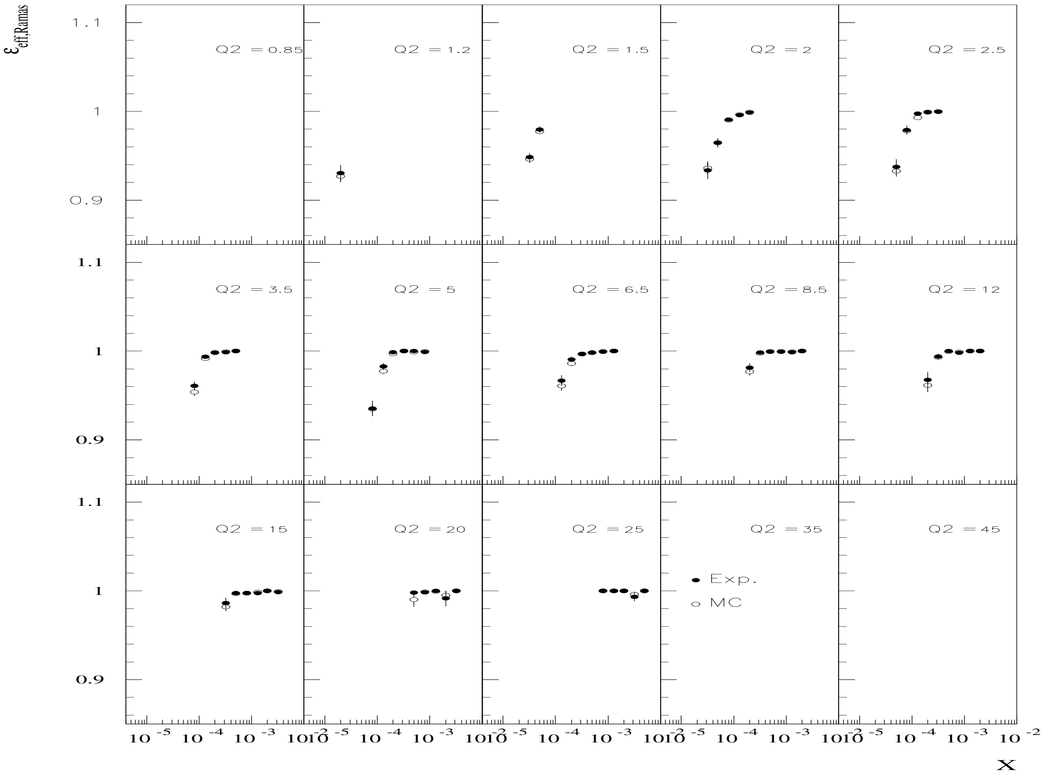
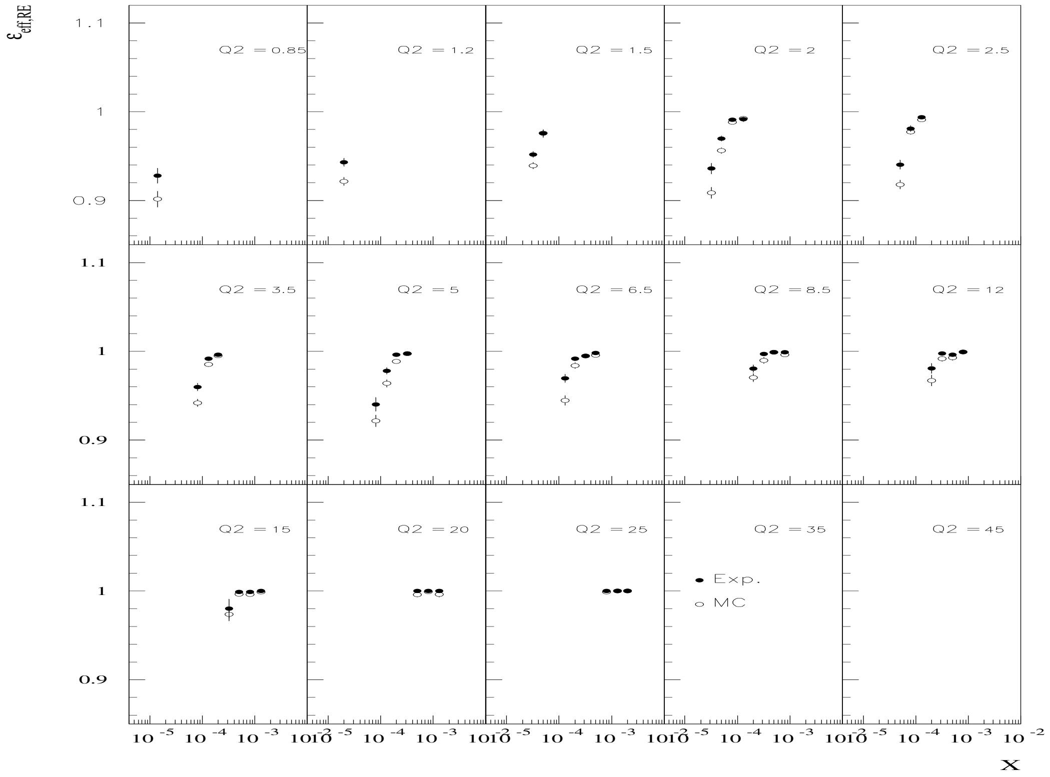


FIG. 7.10 – *Efficacité de la coupure sur la taille transverse de l'amas EM; $R_{amas} \leq 3.5$ cm.*

(A) Méthode électron



(B) Méthode sigma

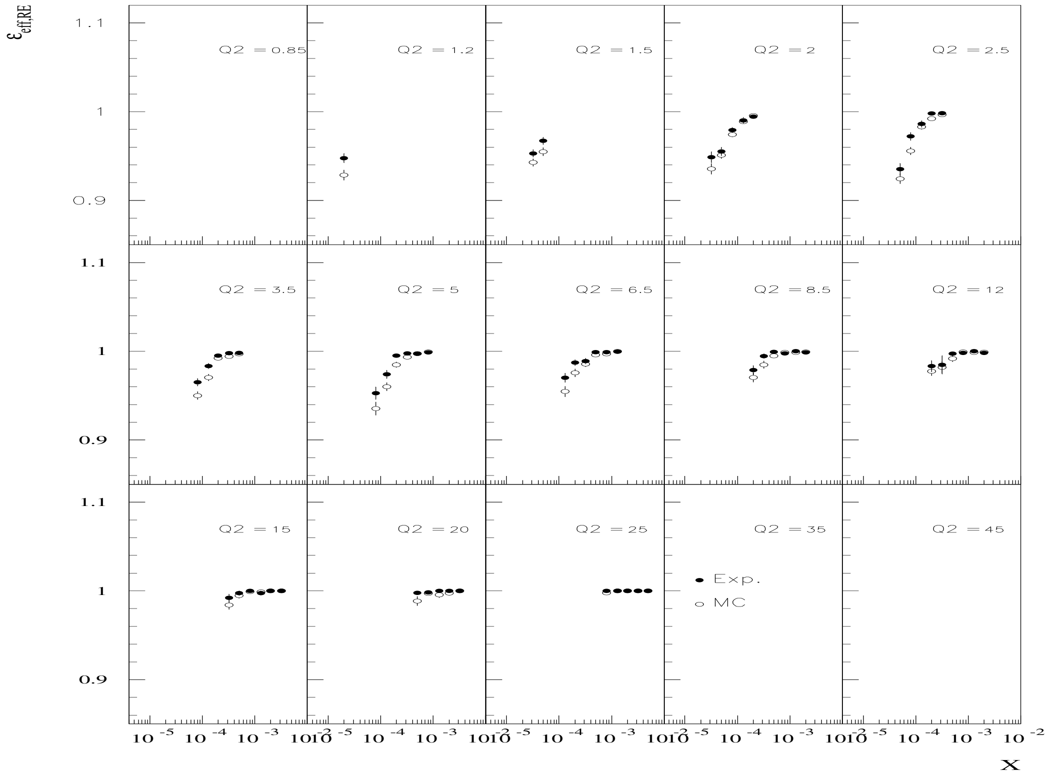


FIG. 7.11 – *Efficacité de la coupure sur la taille longitudinale de l'amas EM;* $R_E = \frac{E_{amas}}{E_{amas}+E_{had}} \geq 0.95$.

7.5 Etude des erreurs systématiques

Les incertitudes systématiques proviennent de sources diverses, elles traduisent de manière quantitative la méconnaissance que l'on a de la réponse des détecteurs utilisés dans l'analyse. Ces incertitudes sont à prendre en compte pour les variables suivantes :

- **Echelle d'énergie électromagnétique (EM) dans SPACAL** : nous avons montré au chapitre 6 que l'échelle absolue d'énergie EM est déterminée par notre procédure de calibration à 0.6% près pour les électrons du pic cinématique, et à 2.5% près pour les électrons de basse énergie ($E_e = 8$ GeV).

  L'erreur sur la mesure de F_2 est ensuite estimée en augmentant puis en diminuant globalement l'échelle d'énergie EM du candidat électron diffusé dans SPACAL, en supposant que cette dernière suit une relation linéaire entre 2.5% à 8 GeV et 0.6% à 27 GeV .

- **Echelle d'énergie hadronique (HAD)** : nous avons étudié au chapitre 6 l'incertitude sur la détermination de l'échelle globale d'énergie hadronique mesurée dans SPACAL, nous avons montré que celle-ci est connue à 7% près.

  Une étude similaire peut être développée lorsque la mesure de l'énergie des hadrons s'effectue dans le calorimètre à Argon Liquide ou lorsque cette énergie est mesurée à partir de l'impulsion des traces.

  Nous avons montré en effet au chapitre 6 que la quantité y_{jb}/y_e est particulièrement sensible à l'incertitude sur la détermination de l'échelle globale sur la mesure de l'énergie des hadrons ; la fig. 7.12 illustre cette propriété en explicitant les incertitudes que nous pouvons obtenir sous-détecteur par sous-détecteur. Nous rappelons ainsi que, pour le calorimètre SPACAL, cette incertitude est de 7%, nous montrons également que pour le calorimètre à Argon Liquide, elle est de 4%, et pour le système de mesure des traces, elle est de 3% (voir fig. 7.12).

- **Mesure de l'angle polaire du candidat électron** : nous avons vu au chapitre 6 que la précision de la mesure de θ_e à l'aide de la trace BDC associée au candidat électron dans SPACAL est de 0.5 *mrad*.

- **Efficacités des coupures de sélection** : nous avons évalué dans la section précédente les différences que l'on obtient lors des comparaisons données/MC pour chaque efficacité associée aux coupures de sélection DIP, nous avons montré que :

Coupure	$\delta_{eff_i}(\%)$
Vertex	1 %
BDC	1 %
R_E	2 %

- **Normalisation du bruit de fond de photoproduction** : au chapitre 6 nous avons montré qu'une étude fondée sur la mesure des principales observables des événements étiquetés permet de déduire l'incertitude sur la soustraction du nombre d'événements γp (évalué avec le MC PHOJET) à notre échantillon d'événements de DIP.

De cette analyse, nous avons déduit que l'accord entre les données (événements étiquetés) et le MC γp est correct, les fluctuations maximales étant de l'ordre de 30% ; l'incertitude sur la soustraction des événements γp est donc de 30%.

- **Correction radiative** : nous avons vu précédemment que le terme de correction radiative (noté δ_r) est dominé par les processus d'émission de photons réels par l'électron incident ou diffusé :

$$\frac{1}{1+\delta_r} = \frac{\textit{nombre d'événements DIP générés (MC Born)}}{\textit{nombre d'événements DIP générés (MC Born + Radiatif)}} \tag{7.37}$$

  De plus, ce dernier se calcule au niveau MC uniquement, comme indiqué sur la formule ci-dessus.

  L'erreur théorique sur la détermination du taux de corrections radiatives - émissions QED- est de l'ordre de 2% lorsque les variables cinématiques sont calculées à l'aide de la méthode électron et de 1% lorsqu'elles sont évaluées à l'aide de la méthode sigma. Cette dernière est en effet moins sensible à la diminution de l'énergie de l'électron incident qui se produit après une émission QED dans l'état initial, comme nous l'avons montré au chapitre précédent ; l'incertitude sur le taux de corrections radiatives est donc plus faible pour la méthode sigma (1%) que pour la méthode électron (2%).

- **Normalisation globale des mesures expérimentales** : l'incertitude sur la normalisation globale de l'expérience provient de l'erreur sur la mesure de la luminosité intégrée, due essentiellement à la méconnaissance de la correction du rejet des paquets satellites du faisceau de protons. Nous avons montré au chapitre 6 que cette erreur est de 1.5% pour l'analyse que nous proposons.

Traitement

La contribution d'une erreur systématique quelconque à la détermination de l'incertitude sur F_2 est évaluée comme suit :

$$\frac{\Delta F_2}{F_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{|N_{MC}^{(+)} - N_{MC}|}{N_{MC}} + \frac{|N_{MC}^{(-)} - N_{MC}|}{N_{MC}}\right) \tag{7.38}$$

où $N_{MC}^{(+)}$ représente le nombre d'événements MC reconstruits -dans chaque domaine cinématique- lorsque l'effet de l'erreur systématique considérée est appliqué positivement ; par exemple, dans le cas de l'échelle d'énergie EM dans SPACAL, $N_{MC}^{(+)}$ correspond au nombre d'événements MC reconstruits, lorsque les variables cinématiques sont calculées en augmentant l'échelle d'énergie EM d'une quantité égale à l'erreur systématique décrite plus haut.

$N_{MC}^{(-)}$ est défini de manière similaire, l'effet de l'erreur systématique étant appliqué de manière négative.

Notons également que les incertitudes expérimentales pour chaque domaine cinématique considéré peuvent être séparées en trois composantes : l'erreur statistique, les erreurs systématiques corrélées, les erreurs systématiques non corrélées.

Les incertitudes systématiques que nous avons explicitées ci-dessus peuvent être distribuées dans les deux dernières catégories (corrélées ou non corrélées), c'est-à-dire qu'elles introduisent ou non une corrélation entre différents domaines cinématiques. Une erreur systématique est ainsi qualifiée de corrélée quand son effet sur la reconstruction des variables cinématiques modifie la répartition des événements dans le plan cinématique.

Les incertitudes concernant la détermination des échelles d'énergie EM ou HAD, l'incertitude sur la mesure de θ_e, de même que l'incertitude sur la soustraction du bruit de fond de photoproduction sont considérées de ce point de vue comme des incertitudes corrélées.

Les fig. 7.13 et 7.14 présentent alors les effets des erreurs systématiques concernant les échelles d'énergie et θ_e pour tous les domaines cinématiques étudiés, pour les méthodes électron et sigma respectivement.

La fig. 7.15 présente la fraction d'événements γp pour tous les domaines, ce qui permet de déduire facilement l'erreur systématique sur la soustraction du bruit de fond de photoproduction.

L'erreur totale pour un domaine cinématique donné correspond alors à la somme quadratique des différentes erreurs définies ci-dessus.

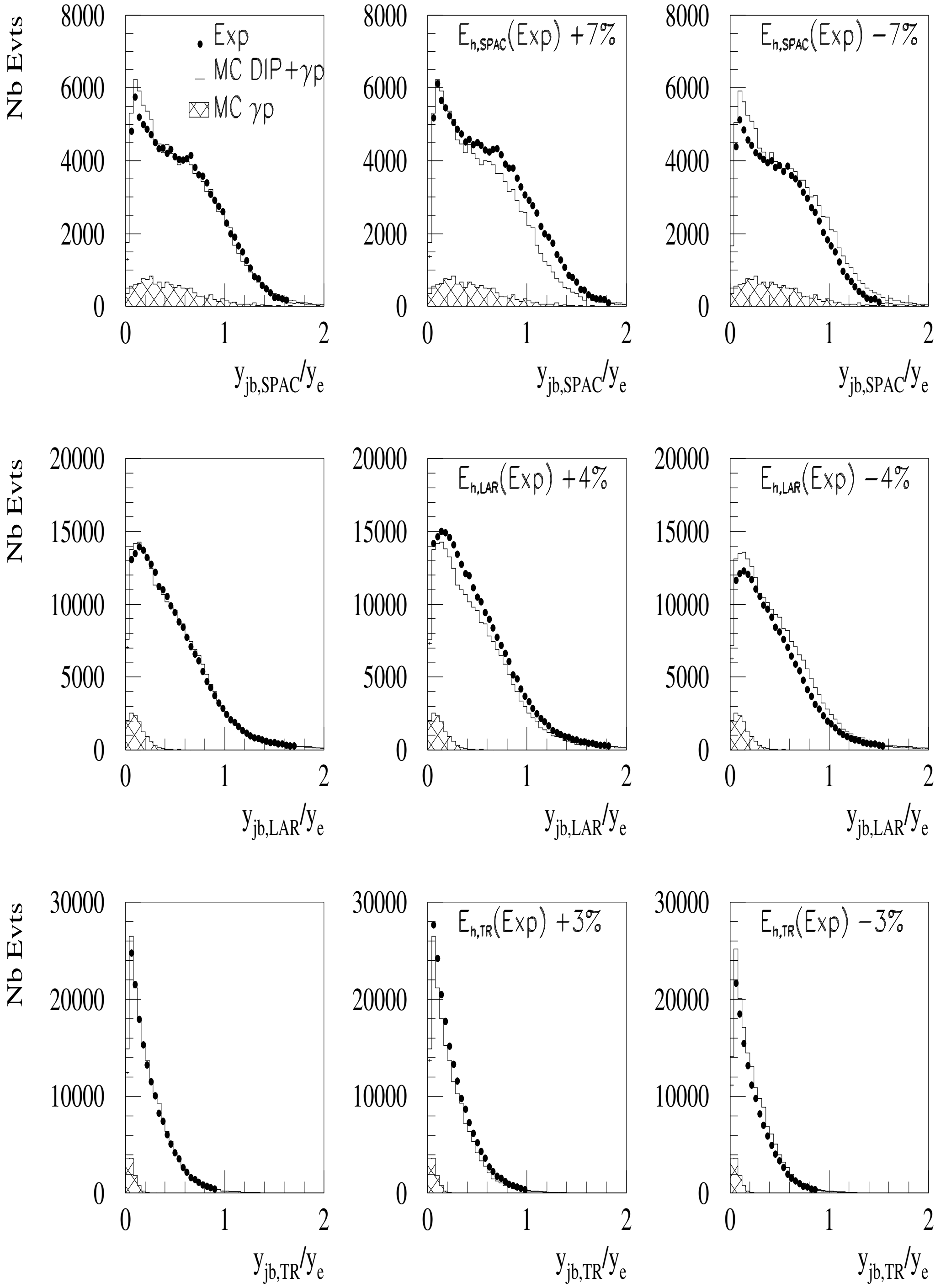
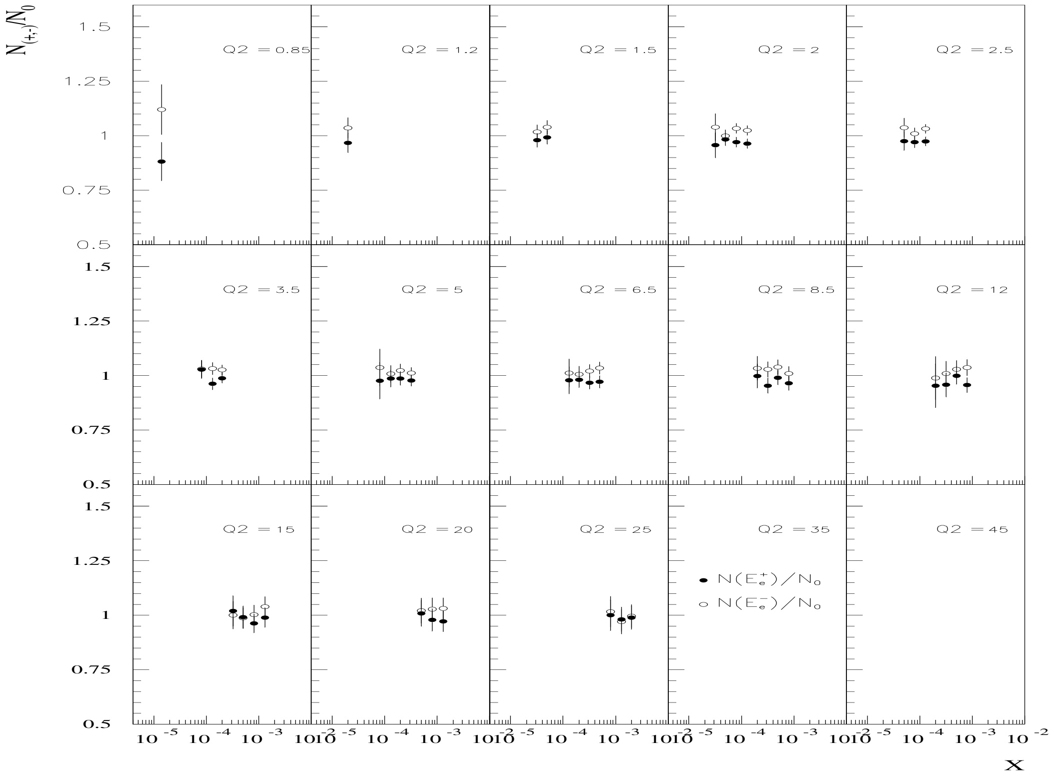


FIG. 7.12 – *Evaluation de l'incertitude sur la détermination de l'échelle d'énergie hadronique lorsque cette dernière est mesurée dans les calorimètres SPACAL* ($E_{h,SPAC}$) *et Argon Liquide* ($E_{h,LAR}$)*, ou à partir des traces* ($E_{h,TR}$)*. Nous présentons les effets provoqués par la variation de l'échelle d'énergie hadronique dans les données -sous détecteur par sous détecteur- sur la distribution* y_{jb}/y_e *(voir texte).*

(a) Variation de l'échelle d'énergie EM



(b) Variation de θ_e

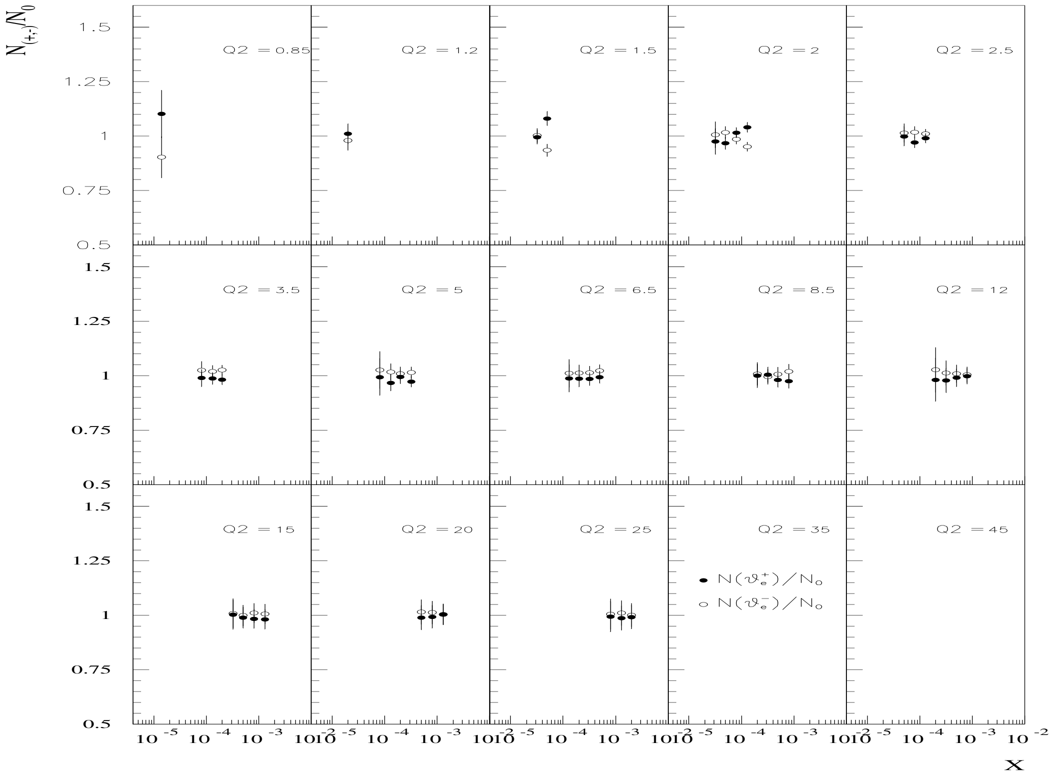
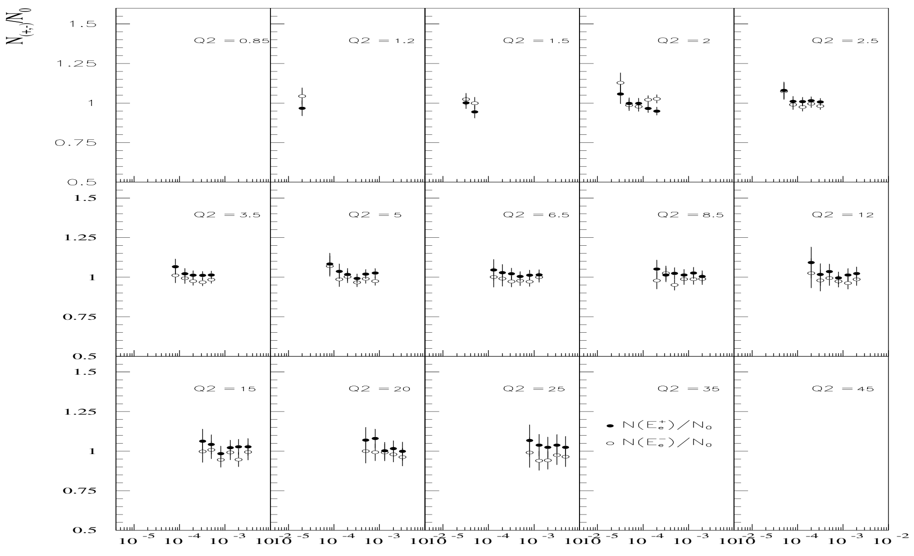
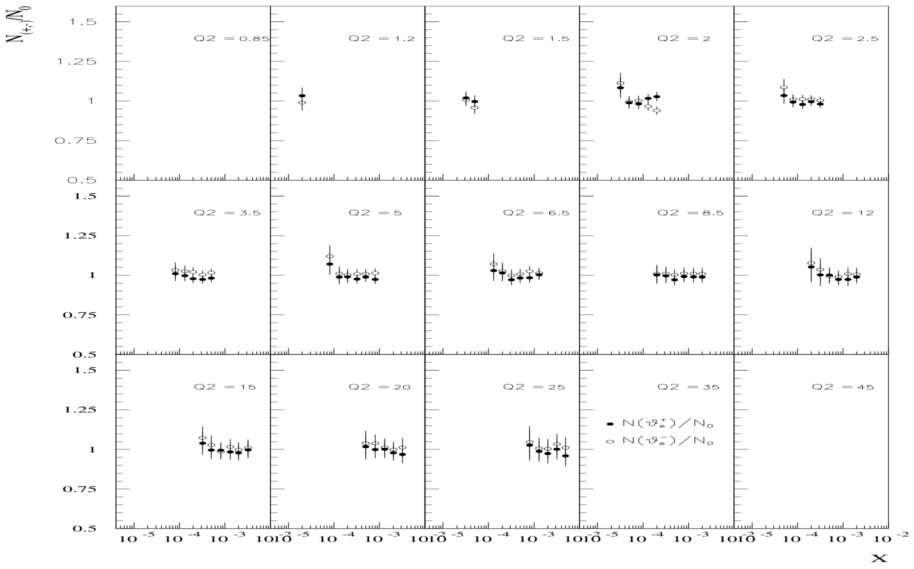


FIG. 7.13 – *Etude des erreurs systématiques pour la méthode électron ; (a) Echelle d'énergie électromagnétique, (b) Angle polaire du candidat électron ; (voir texte).*

(a) Variation de l'échelle d'énergie EM



(b) Variation de θ_e



(c) Variation de l'échelle d'énergie HAD

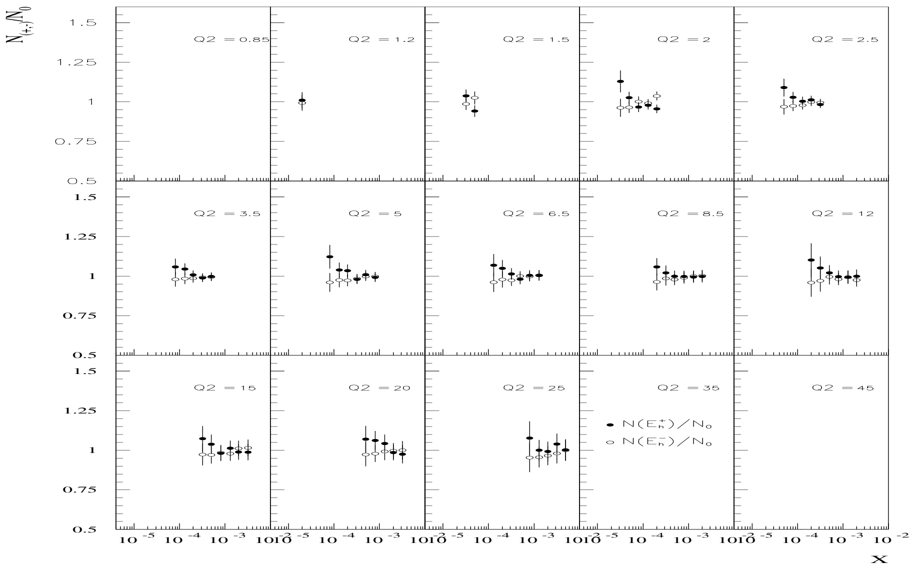
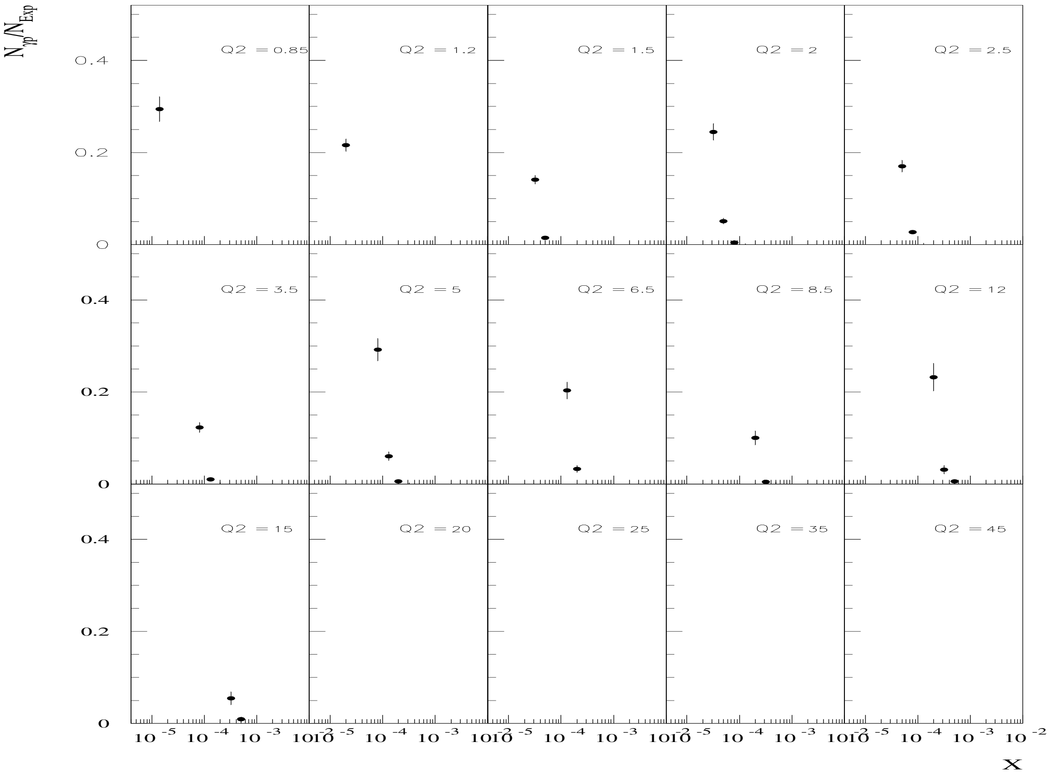


FIG. 7.14 – *Etude des erreurs systématiques pour la méthode sigma ; (a) Echelle d'énergie électromagnétique, (b) Angle polaire du candidat électron, (c) Echelle d'énergie hadronique ; (voir texte).*

(A) Méthode électron



(B) Méthode sigma

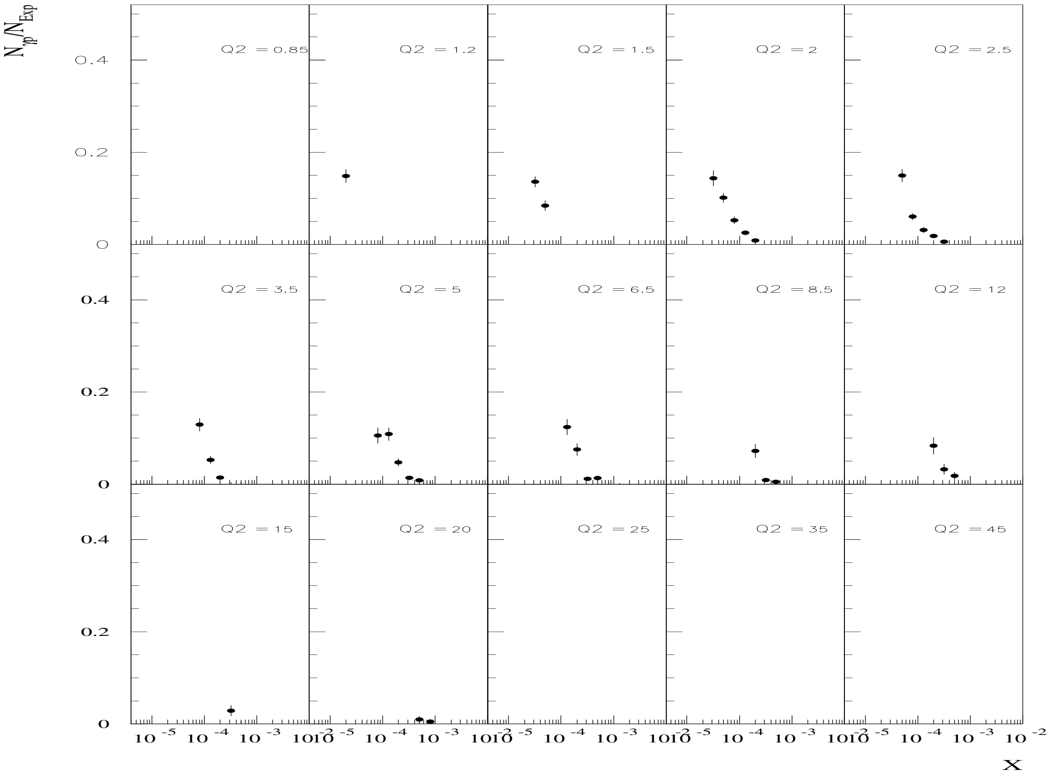


FIG. 7.15 – *Fraction d'événements γp pour les méthodes électron (A) et sigma (B).*

7.6 Mesure de $F_2(x, Q^2)$

On détermine les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
N_{Exp}^{(DIP)} &= N_{Exp} - N_{PHO}\frac{\mathcal{L}_{Exp}}{\mathcal{L}_{PHO}} \\
N_{MC}^{(DIP)} &= N_{DJANGO} \\
F_2^{(Exp)}(x_c, Q_c^2) &= F_2^{(MC)}(x_c, Q_c^2)\frac{N_{Exp}^{(DIP)}}{N_{MC}^{(DIP)}}\frac{\mathcal{L}_{DJANGO}}{\mathcal{L}_{Exp}}
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Nous en déduisons les valeurs de F_2 au centre des domaines cinématiques ; la fig. 7.16 représente ainsi les mesures de F_2 pour les méthodes électron (points noirs) et sigma (points ouverts) avec l'erreur statistique uniquement. Le bon accord entre les deux méthodes montre que les incertitudes expérimentales sont bien contrôlées, comme nous l'avons déjà souligné au chapitre précédent.

La fig. 7.17 représente les mesures de F_2 pour les méthodes électron et sigma avec les erreurs statistiques et systématiques additionnées en quadrature. Nous avons également superposé à cette figure le résultat de l'ajustement QCD obtenu par la collaboration H1, avec les mesures réalisées suite à la prise de données de 1994 [3].

On note le bon accord entre l'ajustement de 1994 et les mesures de notre analyse, le résultat final de notre étude est alors obtenu en combinant les deux méthodes de reconstruction cinématique : nous utilisons la méthode électron à grand y, plus précisément pour $y \geq 0.15$, et la méthode sigma pour $0.15 > y \geq 0.05$, ce qui permet d'utiliser la méthode électron dans la région cinématique où elle demeure la plus performante et la méthode sigma sinon.

La fig. 7.18 illustre les résultats que nous obtenons, les erreurs statistiques et systématiques sont additionnées en quadrature, de plus les mesures de 1994 sont superposées, de même que l'ajustement QCD qu'elles impliquent.

La fig. 7.19 représente les incertitudes totales (erreurs statistiques et systématiques additionnées en quadrature) pour les mesures déduites de notre analyse, auxquelles nous superposons les incertitudes des mesures de 1994. On note que, dans l'intervalle 1.5 GeV $^2 \leq Q^2 \leq 6.5$ GeV ^{2}, les incertitudes expérimentales (1995) ont été réduites d'environ un facteur 2 par rapport aux mesures effectuées précédemment (1994).

Les tables 7.1 et 7.2 regroupent l'ensemble des valeurs de F_2 pour les différents domaines cinématiques considérés, de même que les erreurs statistiques et systématiques[4], le traitement des incertitudes systématiques étant effectué comme nous l'avons précisé plus haut.

---

[4] L'erreur systématique indiquée pour chaque domaine représente la somme quadratique de toutes les erreurs systématiques explicitées précédemment.

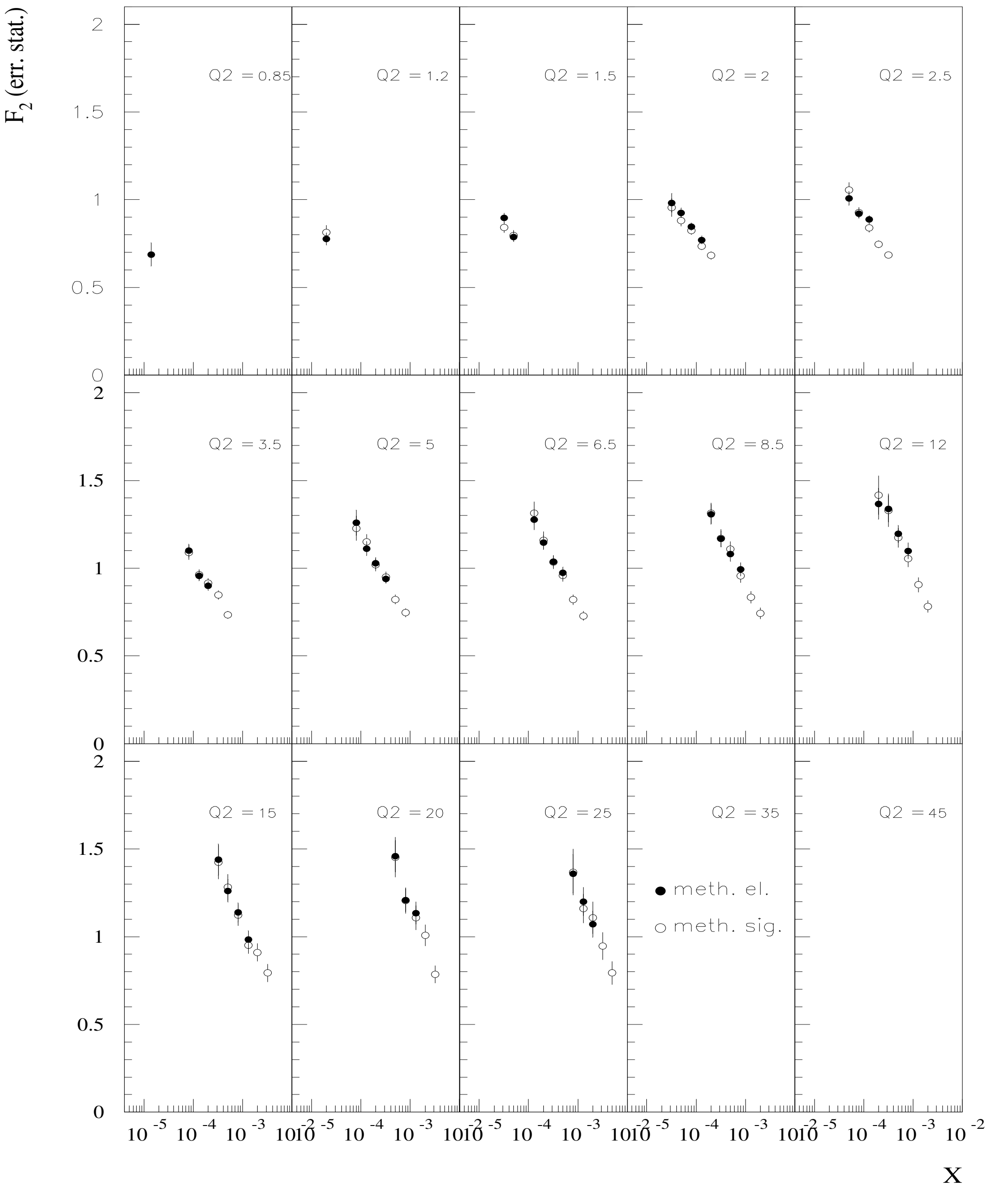


FIG. 7.16 – *Valeurs de $F_2(x, Q^2)$ avec l'erreur statistique seule, pour les méthodes électron (points noirs) et sigma (points ouverts).*

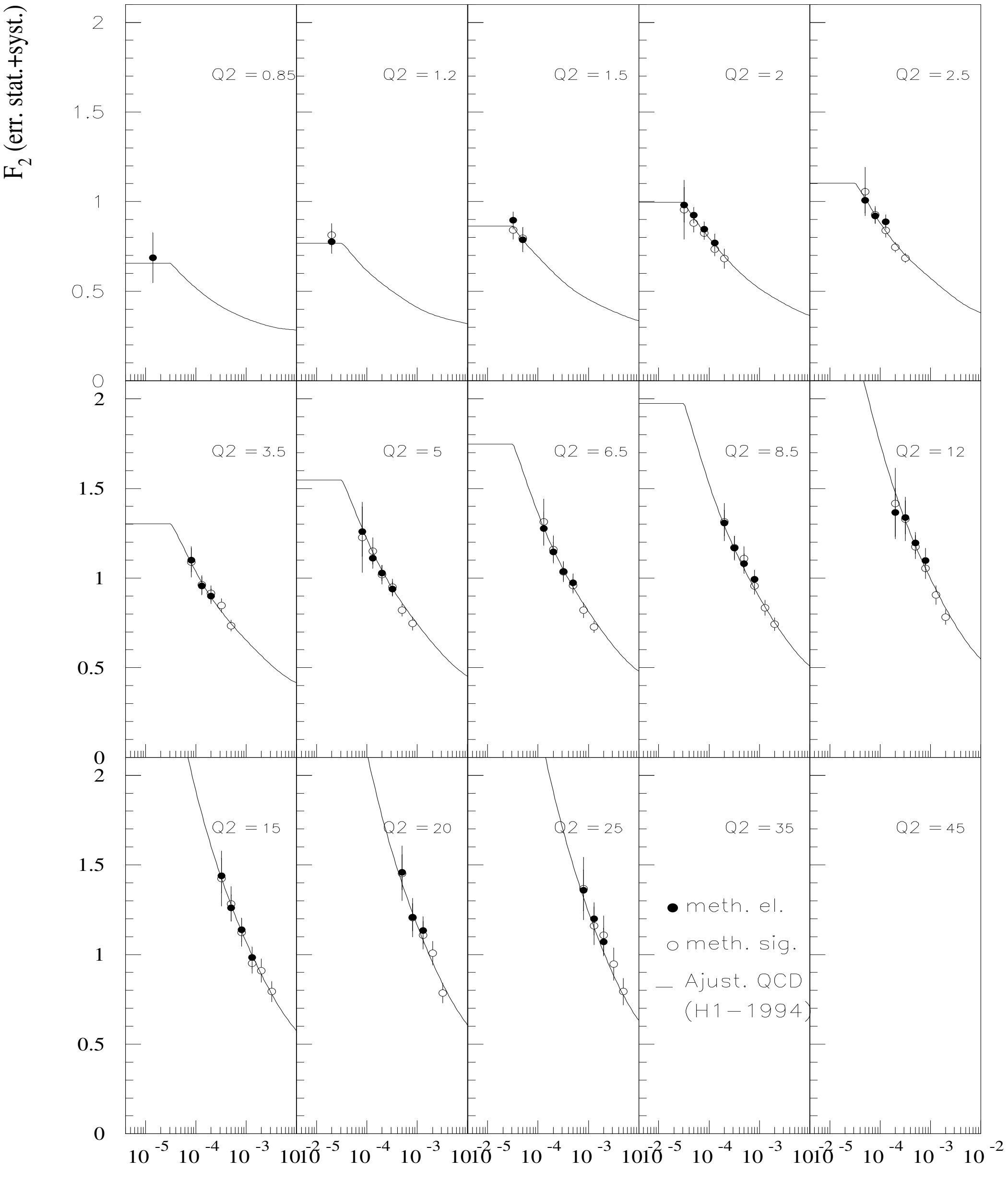


FIG. 7.17 – *Valeurs de $F_2(x, Q^2)$ avec les erreurs statistiques et systématiques additionnées en quadrature, pour les méthodes électron (points noirs) et sigma (points ouverts) ; nous superposons également à ces mesures expérimentales le résultat de l'ajustement QCD -de la collaboration H1- obtenu avec les mesures réalisées suite à la prise de données de 1994 [3].*

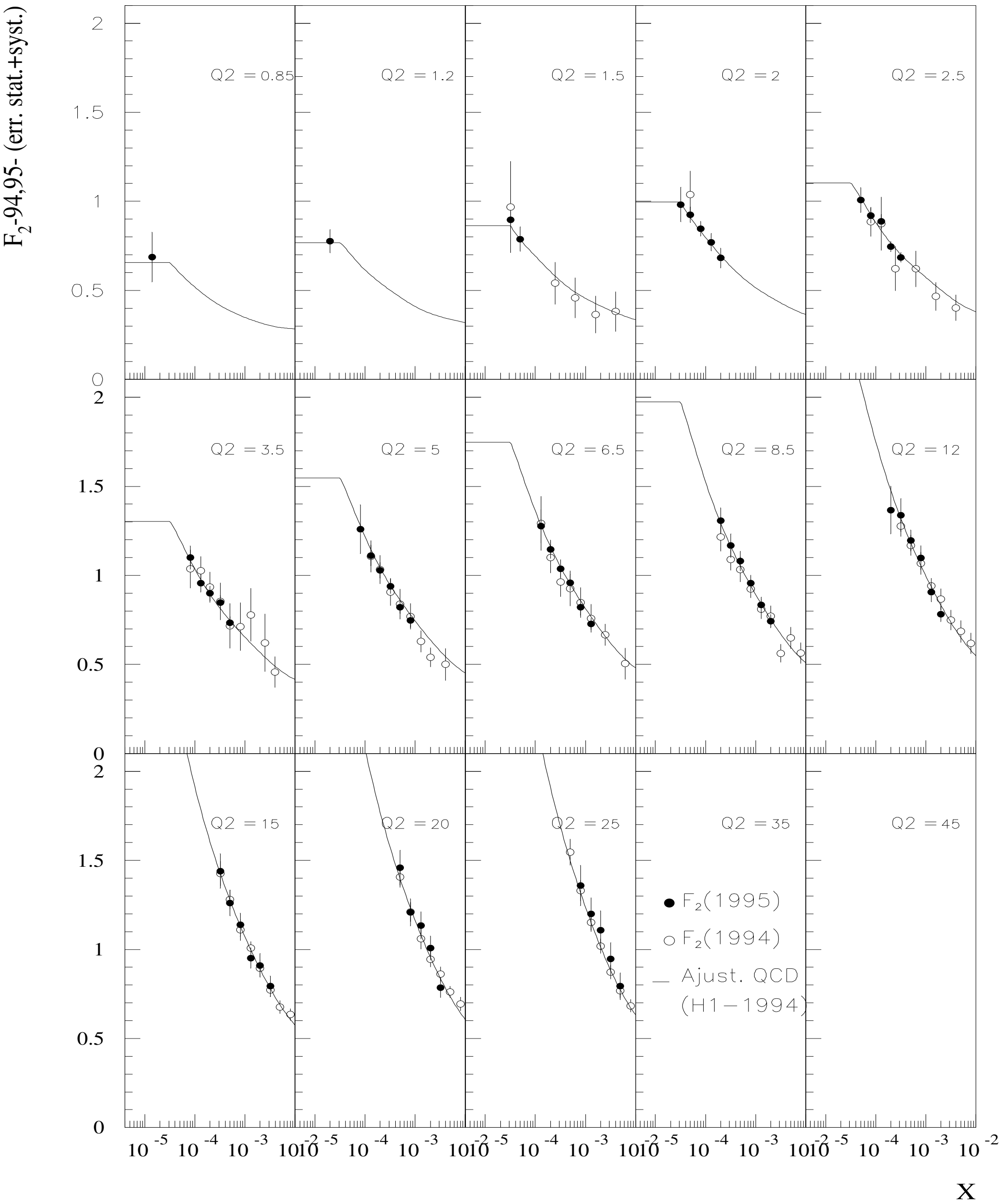


FIG. 7.18 – *Les valeurs de $F_2(x, Q^2)$ obtenues au cours de notre analyse sont superposées aux mesures réalisées suite à la prise de données de 1994 [3]; l'ajustement QCD de la collaboration H1 déduit des données de 1994 est également présenté [3].*

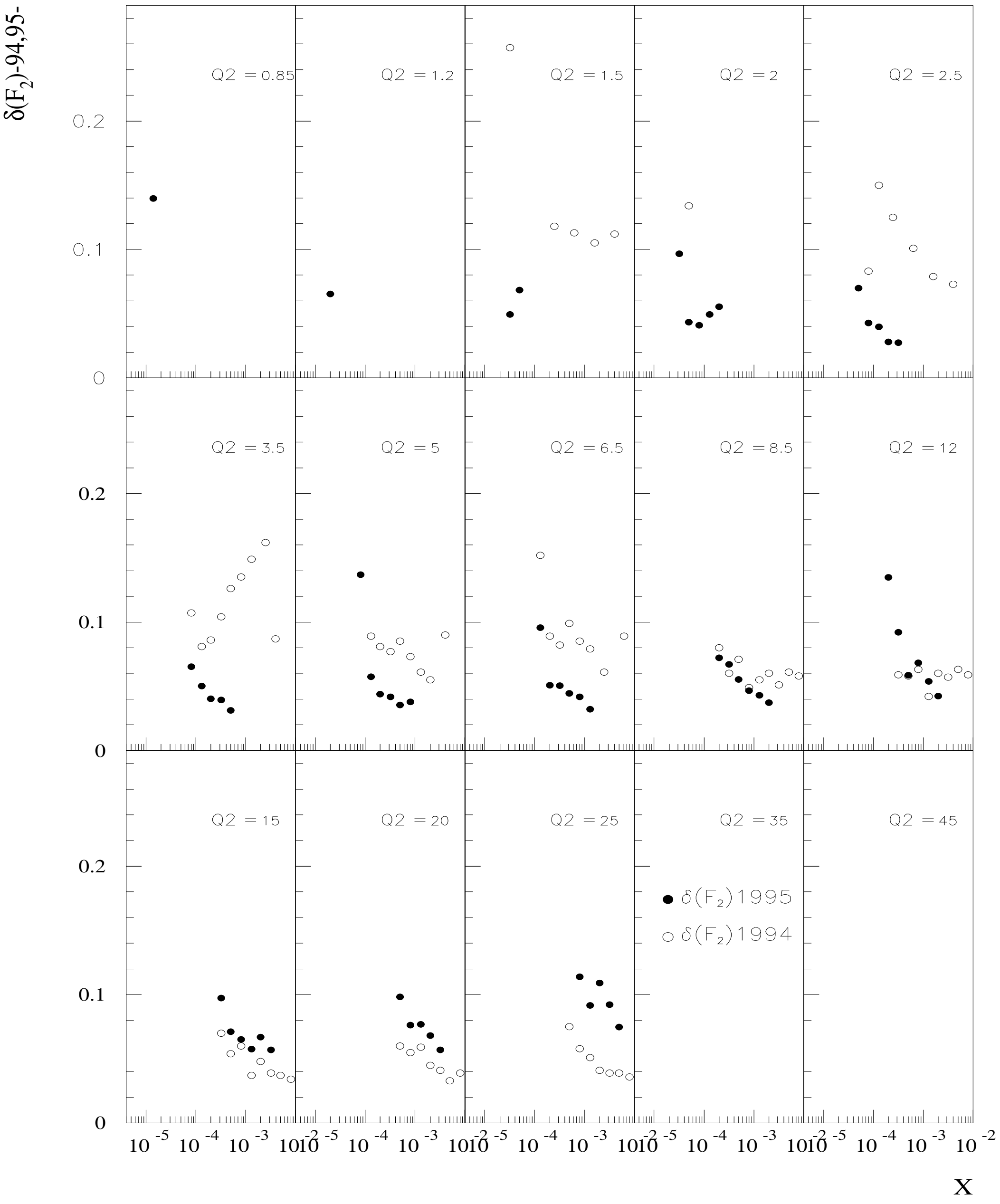


FIG. 7.19 – *Les incertitudes (err. stat. $\oplus$ syst.) sur les mesures de F_2 obtenues avec notre analyse (points noirs) sont comparées aux incertitudes des mesures de 1994 (points ouverts).*

Q^2(GeV ^{2})	x	$F_2(x,Q^2)$	δ_{F_2} (err. stat.)	δ_{F_2} (err. syst.)	δ_{F_2} (err. stat. $\oplus$ syst.)
0.85	0.0000138	0.688	0.067	0.123	0.140
1.20	0.0000200	0.777	0.035	0.055	0.065
1.50	0.0000320	0.896	0.029	0.040	0.049
1.50	0.0000500	0.788	0.027	0.063	0.068
2.00	0.0000320	0.982	0.053	0.081	0.097
2.00	0.0000500	0.925	0.028	0.033	0.043
2.00	0.0000800	0.846	0.022	0.034	0.041
2.00	0.0001300	0.771	0.022	0.044	0.049
2.00	0.0002000	0.682	0.023	0.051	0.055
2.50	0.0000500	1.008	0.039	0.058	0.070
2.50	0.0000800	0.920	0.026	0.034	0.043
2.50	0.0001300	0.887	0.023	0.032	0.040
2.50	0.0002000	0.746	0.021	0.018	0.028
2.50	0.0003200	0.685	0.019	0.020	0.027
3.50	0.0000800	1.100	0.037	0.054	0.065
3.50	0.0001300	0.956	0.028	0.042	0.050
3.50	0.0002000	0.899	0.025	0.032	0.040
3.50	0.0003200	0.847	0.026	0.029	0.039
3.50	0.0005000	0.734	0.022	0.022	0.031
5.00	0.0000800	1.259	0.072	0.117	0.137
5.00	0.0001300	1.112	0.040	0.041	0.058
5.00	0.0002000	1.028	0.033	0.029	0.044
5.00	0.0003200	0.939	0.027	0.032	0.042
5.00	0.0005000	0.822	0.027	0.023	0.035
5.00	0.0008000	0.746	0.025	0.029	0.038
6.50	0.0001300	1.276	0.059	0.075	0.095
6.50	0.0002000	1.147	0.040	0.032	0.051
6.50	0.0003200	1.038	0.034	0.038	0.051
6.50	0.0005000	0.959	0.034	0.028	0.045
6.50	0.0008000	0.820	0.030	0.029	0.042
6.50	0.0013000	0.728	0.027	0.017	0.032
8.50	0.0002000	1.307	0.056	0.046	0.072
8.50	0.0003200	1.167	0.045	0.050	0.067
8.50	0.0005000	1.080	0.041	0.037	0.055
8.50	0.0008000	0.955	0.039	0.026	0.047
8.50	0.0013000	0.835	0.035	0.025	0.043
8.50	0.0020000	0.743	0.032	0.018	0.037

TAB. 7.1 – *Résultats sur la mesure de* F_2 *déduits de notre analyse pour les domaines cinématiques compris entre* $Q^2 = 0.85$ GeV ^{2} *et* $Q^2 = 8.5$ GeV ^{2} *(voir texte).*

Q^2(GeV ^{2})	x	$F_2(x, Q^2)$	δ_{F_2} (err. stat.)	δ_{F_2} (err. syst.)	δ_{F_2} (err. stat. $\oplus$ syst.)
12.00	0.0002000	1.367	0.089	0.101	0.135
12.00	0.0003200	1.339	0.075	0.053	0.092
12.00	0.0005000	1.195	0.050	0.031	0.058
12.00	0.0008000	1.099	0.047	0.049	0.068
12.00	0.0013000	0.905	0.042	0.034	0.054
12.00	0.0020000	0.782	0.035	0.024	0.042
15.00	0.0003200	1.440	0.089	0.039	0.097
15.00	0.0005000	1.261	0.064	0.030	0.071
15.00	0.0008000	1.139	0.055	0.035	0.065
15.00	0.0013000	0.952	0.048	0.032	0.058
15.00	0.0020000	0.911	0.051	0.044	0.067
15.00	0.0032000	0.793	0.051	0.024	0.057
20.00	0.0005000	1.459	0.089	0.042	0.098
20.00	0.0008000	1.208	0.065	0.040	0.076
20.00	0.0013000	1.135	0.065	0.041	0.077
20.00	0.0020000	1.008	0.061	0.030	0.068
20.00	0.0032000	0.785	0.049	0.029	0.057
25.00	0.0008000	1.358	0.109	0.033	0.114
25.00	0.0013000	1.200	0.082	0.040	0.092
25.00	0.0020000	1.108	0.092	0.059	0.109
25.00	0.0032000	0.947	0.078	0.048	0.092
25.00	0.0050000	0.793	0.066	0.035	0.075

TAB. 7.2 – *Résultats sur la mesure de F_2 déduits de notre analyse pour les domaines cinématiques compris entre $Q^2 = 12$ GeV ^{2} et $Q^2 = 25$ GeV ^{2} (voir texte).*

Les résultats de notre analyse ont permis de réduire d'un facteur 2 les incertitudes sur la mesure de F_2 pour des valeurs de Q^2 comprises entre 1.5 GeV ^{2} et 6.5 GeV ^{2} à bas x ($x \leq 10^{-2}$) par rapport aux mesures antérieures dans ce même domaine cinématique. Elles sont ainsi bien adaptés, en association avec d'autres mesures à plus bas Q^2, pour étudier la transition entre les régimes non-perturbatif (de type Regge) et le régime perturbatif de la QCD.

De plus, la précision de ces mesures à bas x rend possible une étude plus pertinente du comportement de F_2 à bas x, afin de déterminer la dynamique, DGLAP ou BFKL, qui reproduit le plus fidèlement les données dans ce domaine cinématique.

Comme nous l'avons montré au chapitre 4, les mesures de F_2 sont essentielles pour la détermination des distributions partoniques par la procédure d'ajustements QCD. Cette procédure est de plus un test important de la QCD perturbative ; nous présentons aini un ajustement QCD de ces nouvelles données afin d'en déduire la densité de gluons avec une précision accrue à bas x.

7.7 Etude de la transition entre les domaines non-perturbatif et perturbatif de la QCD

Pour étudier la transition entre les domaines perturbatif et non-perturbatif, il convient de comparer nos mesures à différentes prédictions théoriques :

- une prédiction issue de la QCD perturbative ;
- une prédiction dérivant de la phénoménologie de Regge ;
- et également, une prédiction tentant de reproduire la transition entre les deux régimes précédents.

On distingue ainsi :

- *Le modèle de Glück, Reya et Vogt (GRV) [4]*: Ce dernier est essentiellement fondé sur la QCD perturbative avec l'hypothèse que les densités de partons à $Q_0^2 = 0.34$ GeV ^{2} sont de type valence, c'est-à-dire que la probabilité de trouver un parton dans le proton avec une fraction d'impulsion x tend vers zéro quand $x \to 0$ (voir chapitre 2).
- *Le modèle de Donnachie et Landshoff (DOLA) [5]*: Ce dernier paramétrise un régime de type Regge et décrit remarquablement le comportement des sections efficaces en photoproduction ($Q^2 = 0$ GeV ^{2}).

  Les auteurs supposent alors que cette tendance peut être extrapolée jusqu'à $Q^2 \simeq 10$ GeV ^{2} ; dans ce cadre, les prédictions DOLA pour les sections efficaces totales peuvent être interprétées comme la contribution de processus non-perturbatifs pour des valeurs non nulles de Q^2.
- *Le modèle de Badelek et Kwiecinski (BK) [6]*: Ce modèle suppose que la transition entre les régimes non-perturbatif et perturbatif s'effectue sans divergence des fonctions de structure du proton, le domaine non-perturbatif

étant considéré comme un domaine où les processus de type VMD ("Vector Meson Dominance") dominent (voir chapitre 2).

La fonction de structure F_2 est alors paramétrisée comme suit :

$$F_2(x,Q^2) = F_2^{VMD}(x,Q^2) + \frac{Q^2}{Q_0^2+Q^2} F_2^{QCD}(\bar{x}, Q^2+Q_0^2) \qquad (7.40)$$

où $F_2^{VMD}(x,Q^2)$ contient la somme des sections efficaces de production des vecteurs mésons légers ($M_V^2 < Q_0^2$), Q_0^2 définit la frontière entre les régimes VMD et QCD ($Q_0^2 \simeq 1.2$ GeV ^{2}) ; les vecteurs mésons considérés dans ce modèle sont alors ρ, ω et ϕ.

De plus, $F_2^{QCD}(\bar{x}, Q^2+Q_0^2)$ est inspirée du modèle GRV avec $\bar{x} = \frac{Q^2+Q_0^2}{W^2+Q^2-M^2+Q_0^2}$, on note également qu'à bas Q^2, la contribution perturbative F_2^{QCD} est diminuée d'un facteur $\frac{Q^2}{Q_0^2+Q^2}$.

Afin d'étudier de manière appropriée la transition entre les régimes non-perturbatif et perturbatif, et de permettre une comparaison directe entre les données de diffusion inélastique profonde (DIP) et celles de photoproduction (à $Q^2 = 0$ GeV ^{2}), nous transformons les mesures de F_2 présentées ci-dessus en sections efficaces totales photon virtuel-proton, $\sigma_{\gamma^* p}^{tot}$, soit :

$$\sigma_{\gamma^* p}^{tot} = \sigma_T + \sigma_L = \frac{4\pi^2\alpha}{Q^2} F_2 \qquad (7.41)$$

La fig. 7.20 illustre le comportement de $\sigma_{\gamma^* p}^{tot}$ en fonction de W pour différentes valeurs de Q^2.

On remarque le bon recouvrement cinématique réalisé avec les données à bas Q^2 (déduites de notre analyse et celles présentées par H1 [7] ou ZEUS [8]). Ces mesures, effectuées dans l'expérience H1 avec le nouveau calorimètre arrière SPACAL associé à la BDC, couvrent largement l'intervalle entre les mesures de DIP précédentes obtenues par H1 [3], NMC [9] ou E665 [10], et les mesures de section efficace de photoproduction [11], [12].

On note que la pente de la section efficace diminue continuement quand Q^2 décroît jusqu'à la limite de photoproduction $Q^2 = 0$ GeV ^{2} ; de plus, la fig. 7.20 montre également que le modèle DOLA [5] -de type Regge-, qui décrit parfaitement le régime de photoproduction ($Q^2 = 0$ GeV ^{2}), ne s'accorde pas aux mesures pour $Q^2 > 0$ GeV ^{2}, la dépendance en W prédite par ce modèle demeure en effet relativement plate alors que les données présentent une montée de $\sigma_{\gamma^* p}^{tot}$ à grand W (soit une montée de F_2 à bas x).

Le modèle de BK semble au contraire bien décrire l'ensemble des mesures jusqu'à $Q^2 = 0.35$ GeV ^{2}, il n'est cependant pas adapté pour s'étendre au régime de photoproduction. Notons également que la prédiction du modèle GRV est remarquable pour $Q^2 \geq 1.2$ GeV ^{2}, où le régime d'évolution de la QCD perturbative est ainsi bien établi.

Nous présentons sur la fig. 7.21 ces résultats d'une manière différente qui met en exergue la différence de nature entre les processus de DIP et ceux de photoproduction. Nous considérons la variation de la quantité $Q^2\sigma_{\gamma^* p}^{tot} = 4\pi\alpha^2 F_2$ en fonction de

Q^2. A grand Q^2, l'invariance d'échelle de Bjorken implique que cette observable est indépendante de Q^2 et dépend uniquement de x ; quand Q^2 diminue, cette invariance d'échelle est brisée comme le montre la fig. 7.21, en particulier la constante de couplage α_S devient importante et les effets non-perturbatifs ne sont plus négligeables. De plus, lorsque $Q^2 \to 0$ GeV ^{2}, $Q^2\sigma^{tot}_{\gamma^*p}$ tend vers zéro comme une fonction de Q^2.

Sur la fig. 7.21 nous observons ainsi que, pour $Q^2 \geq 1$ GeV ^{2}, $Q^2\sigma^{tot}_{\gamma^*p}$ est en première approximation une constante de Q^2 et ne dépend que de W, ce qui caractérise le domaine de validité de la QCD perturbative, alors que pour des valeurs de Q^2 plus petites, l'invariance d'échelle est brisée et les effets non-perturbatifs deviennent importants.

Ces conclusions sont confirmées par l'adéquation des mesures expérimentales aux modèles théoriques, GRV décrit bien le domaine perturbatif, BK étend ce domaine vers des valeurs de $Q^2 \geq 0.35$ GeV ^{2} mais reste impropre pour décrire le régime de photoproduction où la paramétrisation DOLA est pertinente. En l'état, nous ne comprenons donc pas de façon satisfaisante la transition entre les régimes non-perturbatif et perturbatif de la QCD.

7.8 Comportement de F_2 à bas x

Au chapitre 3, nous avons défini un estimateur, noté $\lambda(Q^2)$, tel que :

$$\lambda(Q^2) = \left\langle \frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln \frac{1}{x}} \right\rangle_{x \leq 0.1} (Q^2) \tag{7.42}$$

qui permet de quantifier la montée de $F_2(x, Q^2)$ à bas x, c'est-à-dire qui permet de traduire analytiquement les deux propriétés suivantes vérifiées par la fonction de structure F_2 :

- *forte montée à bas x*, soit $\lambda(Q^2) \geq 0.1$ $\forall Q^2$.
- *d'autant plus forte que Q^2 augmente*, soit $\lambda(Q^2)$ fonction croissante de Q^2.

Nous avons montré alors que les prédictions théoriques concernant λ pour les équations d'évolution DGLAP et BFKL sont bien distinctes ; par exemple, l'approche DGLAP implique la propriété de concavité suivante :

$$\frac{\partial^2}{(\partial \ln Q^2)^2} \lambda^{DGLAP}(Q^2) < 0 \tag{7.43}$$

alors que l'approche BFKL impose l'inverse :

$$\frac{\partial^2}{(\partial \ln Q^2)^2} \lambda^{BFKL}(Q^2) > 0 \tag{7.44}$$

On présente sur la fig. 7.22 les valeurs de λ déterminées à partir de nos mesures de F_2 et des mesures de 1994 [3], en les comparant aux prédictions théoriques pour les dynamiques DGLAP (sans divergence de la densité initiale de gluons à bas x) et BFKL (voir chapitre 3). On observe que la dynamique DGLAP s'ajuste bien aux données, en particulier à nos nouvelles mesures pour $Q^2 < 6.5$ GeV ^{2} ; nous pouvons donc conclure que les comportement de F_2 à bas x est parfaitement compatible avec ce régime d'évolution de la QCD perturbative. Nous illustrons à nouveau cette propriété dans le paragraphe suivant par la réalisation d'ajustements QCD.

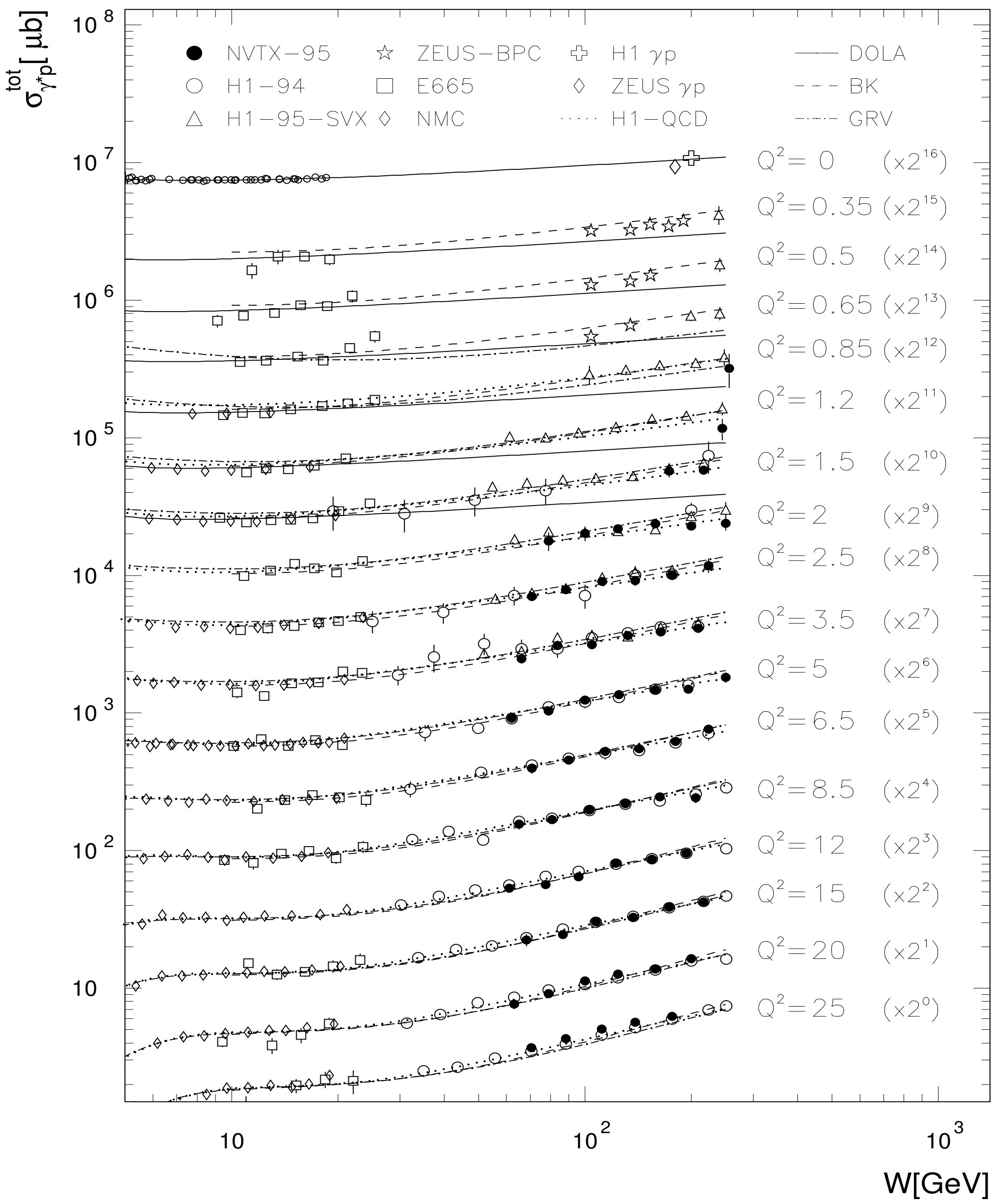


FIG. 7.20 – *Section efficace totale photon-proton, $\sigma^{tot}_{\gamma^* p} = \sigma_T + \sigma_L = \frac{4\pi^2\alpha}{Q^2}F_2$, exprimée en fonction de W pour les différents domaines cinématiques en Q^2. Nous représentons les mesures déduites de notre analyse (points noirs), avec plusieurs autres mesures de DIP : celles de l'expérience H1 de 1994 [3], de 1995 en configuration de vertex décalé [7] et celles des expériences ZEUS [8], NMC [9], E665 [10]. Nous indiquons également les mesures de section efficace totale γp (photoproduction) réalisées par les expériences H1 [11] et ZEUS [12]. Les courbes illustrent ensuite les différentes prédictions théoriques ; on distingue l'ajustement QCD de H1 (1994) [3] ainsi que les paramétrisations des modèles GRV [4], DOLA [5] et BK [6] (voir texte).*

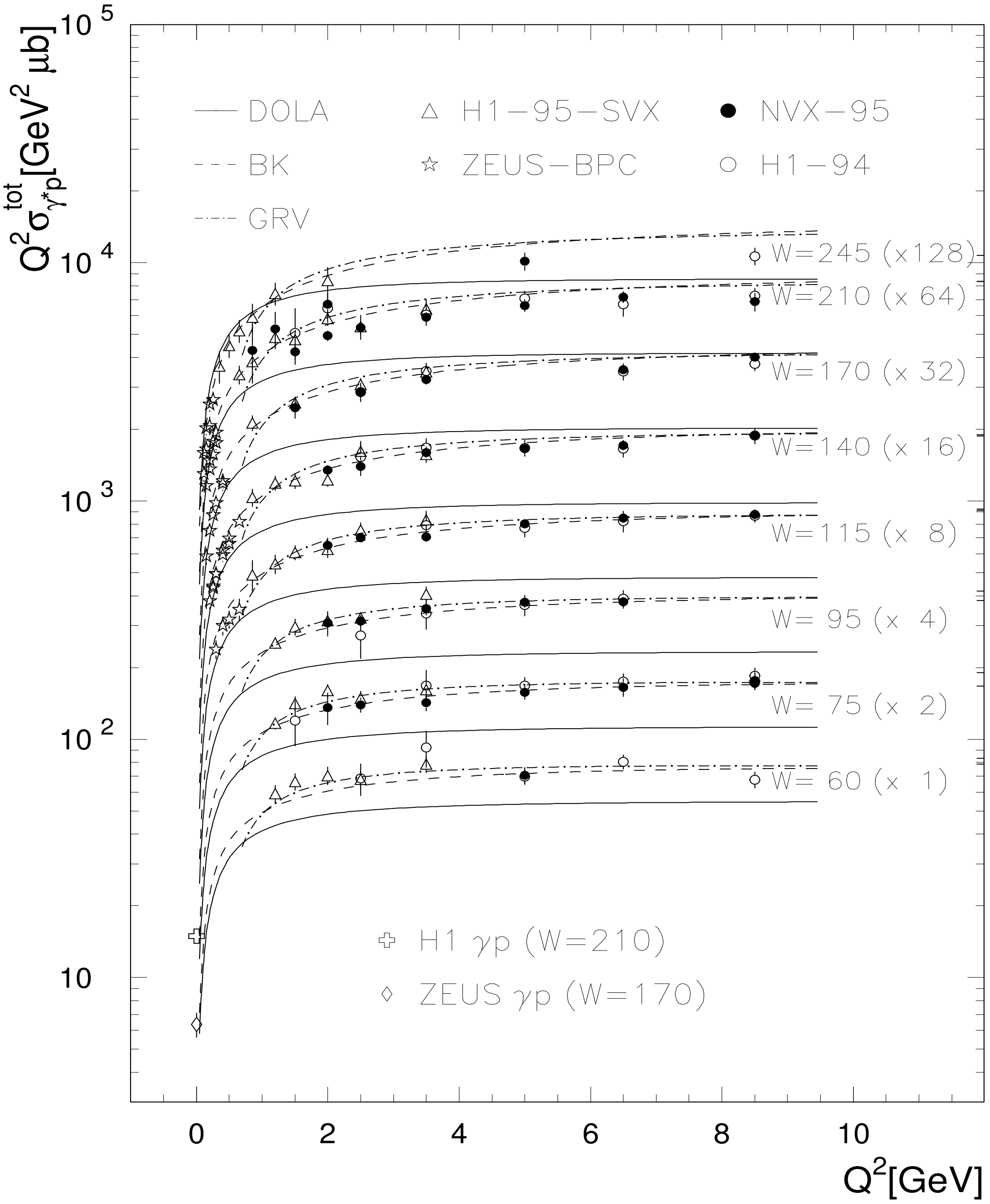


FIG. 7.21 – *Observable :* $Q^2\sigma^{tot}_{\gamma^*p} = 4\pi^2\alpha F_2$, *exprimée en fonction de* Q^2 *pour les différents domaines cinématiques en* W. *Nous représentons les mesures déduites de notre analyse (points noirs), de même que celles de l'expérience H1 de 1994 [3], de 1995 en configuration de vertex décalé [7] et celles de l'expérience ZEUS [8]. Nous indiquons également les mesures de section efficace totale* γp *(photoproduction) réalisées par les expériences H1 [11] et ZEUS [12]. Les courbes illustrent ensuite les différentes prédictions théoriques ; on distingue l'ajustement QCD de H1 (1994) [3] ainsi que les paramétrisations des modèles GRV [4], DOLA [5] et BK [6] (voir texte).*

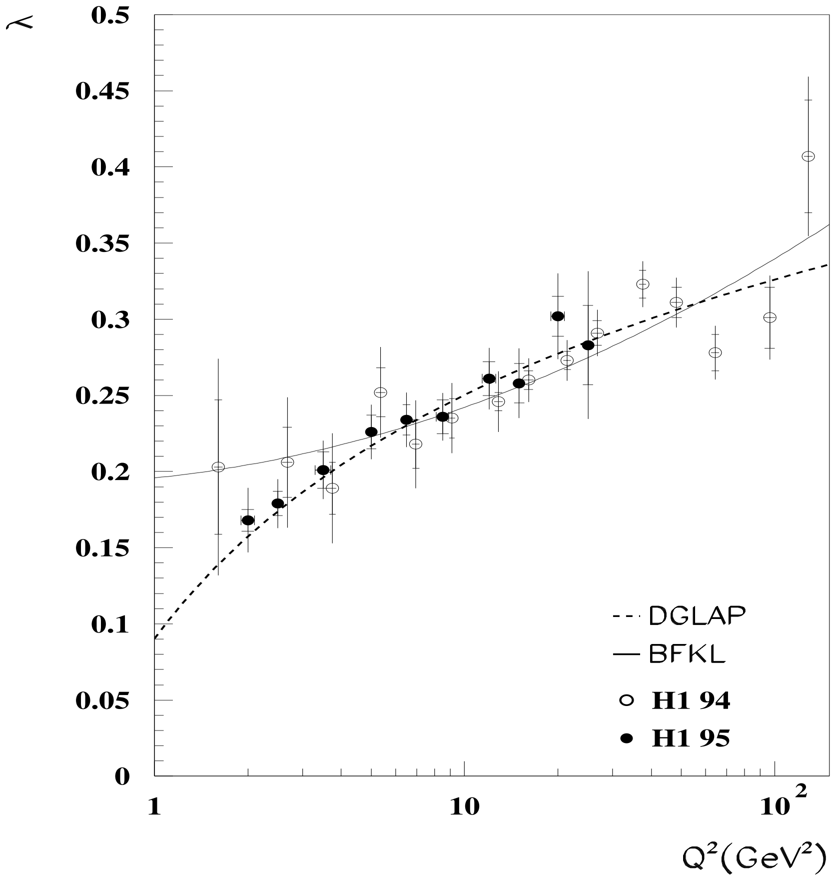


FIG. 7.22 – *Valeurs de λ déterminées à partir de nos mesures de F_2 (points noirs) et des mesures de 1994 (points ouverts) [3], comparées aux prédictions théoriques pour les dynamiques DGLAP (sans divergence de la densité initiale de gluons à bas x) et BFKL.*

7.9 Ajustements QCD

Les résultats précédents nous ont montré que les équations d'évolution DGLAP de la QCD perturbative prédisent remarquablement les mesures de DIP pour $Q^2 >$ 1 GeV ^{2}. Comme nous l'avons expliqué au chapitre 4, cette adéquation entre les prédictions théoriques et les données peut être analysée précisément par la procédure d'ajustements QCD ; cette procédure permet ensuite de déduire la densité de gluons.

Un ajustement QCD a ainsi été réalisé en combinant les données de H1 de 1994 à 1996, ainsi que les mesures des expériences NMC [9] et BCDMS [13]. Les distributions initiales sont définies pour $Q_0^2 = 1$ GeV ^{2} et la valeur de $\alpha_S(M_Z^2)$ considérée est telle que :

$$\alpha_S(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.005$$

La faible valeur de Q_0^2 impose un traitement particulier des saveurs lourdes ; nous avons montré au chapitre 4 que si l'on considère les quarks u, d, s comme des quarks de masse nulle et si la masse du quark c est prise en compte, alors F_2 est calculée

A_g	B_g	C_g		
48.88	0.91	11.40		
A_S	B_S	C_S	D_S	E_S
0.37	-0.09	19.70	32.15	-5.64

TAB. 7.3 – *Valeurs des paramètres à* $Q^2 = 1$ GeV ^{2} *pour la densité des quarks de la mer et la densité gluonique.*

comme suit :

$$F_2(x,Q^2) = F_2^{u,d,s}(x,Q^2) + F_2^c(x,Q^2) \tag{7.45}$$

$$F_2^c(x,Q^2) = \int_{ax}^{1} \frac{dy}{y} C_{2,FPG}(y,Q^2,m_c^2)\, g(x/y,Q^2) \tag{7.46}$$

Cependant, comme nous l'avons démontré au chapitre 4, cette expression n'est valide que dans l'hypothèse où l'on assure un prolongement analytique entre le traitement du quark c à bas Q^2 (équation (7.46)), et la limite à grand Q^2 où le quark c peut être considéré comme un quark de masse nulle évolué au sein des équations DGLAP. L'ajustement QCD est ensuite réalisé suivant la procédure que nous avons décrite au chapitre 4.

Les expressions analytiques des distributions initiales sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
xg(x,Q_0^2) &= A_g x^{B_g}(1-x)^{C_g} \\
xu_v(x,Q_0^2) &= A_u x^{B_u}(1-x)^{C_u}(1+D_u x+E_u\sqrt{x}) \\
xd_v(x,Q_0^2) &= A_d x^{B_d}(1-x)^{C_d}(1+D_d x+E_d\sqrt{x}) \\
xS(x,Q_0^2) &= A_\Sigma x^{B_S}(1-x)^{C_S}(1+D_S x+E_S\sqrt{x}) \qquad (7.47)
\end{aligned}$$

où $xS \equiv x\bar{u} + x\bar{d}$ et $xs = x\bar{s} = xS/4$.
avec :

$$F_2^{QCD}(x,Q^2) \equiv \left[\frac{11}{18}xS + \frac{4}{9}xu_v + \frac{1}{9}xd_v + F_2^{c\bar{c}}\right](x,Q^2) \tag{7.48}$$

De plus, lors de l'évolution, les relations suivantes sont imposées :

$$B_u = B_d \qquad \int_0^1 u_v(x)dx = 2 \qquad \int_0^1 d_v(x)dx = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n_f}\int_0^1 x(q_i+\bar{q}_i+g)dx = 1$$

On obtient les valeurs des paramètres indiquées dans la table (7.3) pour les distributions $x\Sigma$ et xg. Le résultat de l'ajustement QCD obtenu est présenté sur la fig. 7.23 et la densité de gluons qui s'ensuit est indiquée sur la fig. 7.24 pour deux valeurs de Q^2 [14].

Il sagit d'un test essentiel de la QCD perturbative dont les prédictions concernant les distributions partoniques sont d'autant plus fines que la précision des mesures augmentent : notre analyse est ainsi déterminante pour les valeurs de Q^2 plus petites que 6.5 GeV ^{2} (voir fig. 7.23).

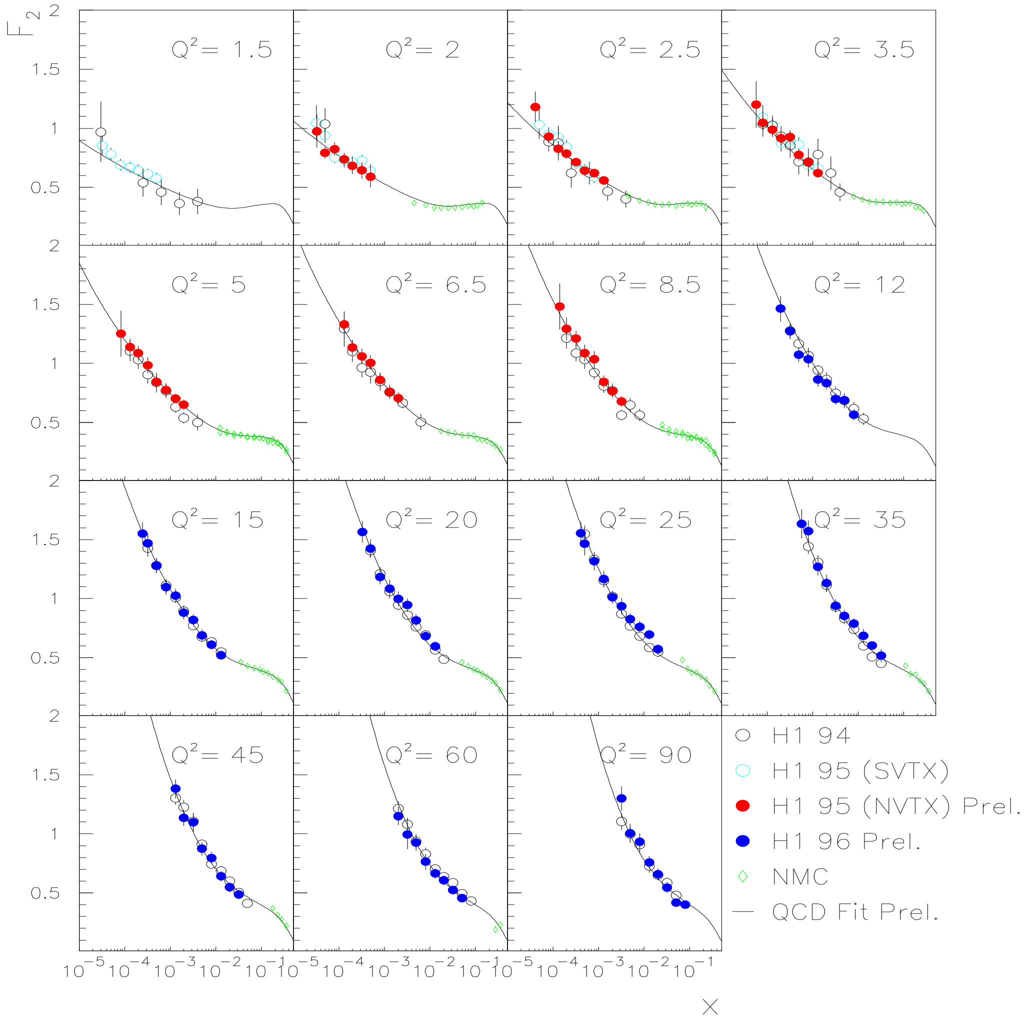


FIG. 7.23 – *Résultat de l'ajustement QCD réalisé sur les données de H1 de 1994 à 1996, incluant les mesures de notre analyse (H1 95 - NVTX-), les données de NMC et celles de BCDMS (non représentées sur cette figure).*

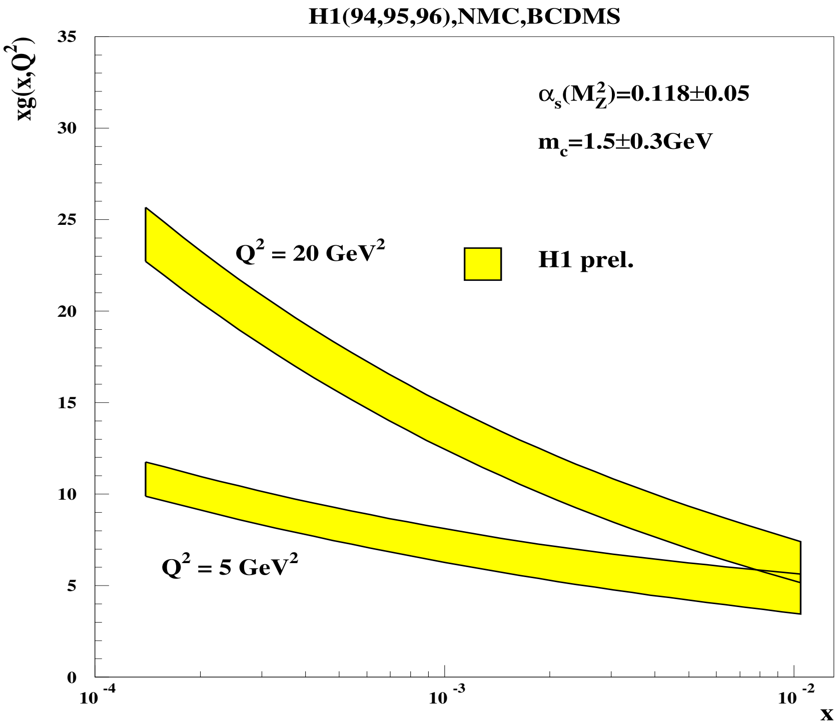


FIG. 7.24 – *Densité de gluons déduite de l'ajustement QCD (voir fig. 7.23) ; la bande grise représente l'erreur totale, dominée par l'incertitude systématique sur la valeur de* $\alpha_S(M_Z^2)$ *(voir chapitre 4).*

7.10 Conclusions

Nous avons présenté une mesure de la fonction de structure du proton $F_2(x, Q^2)$ pour des valeurs de Q^2 comprises entre 0.85 GeV ^{2} et 25 GeV ^{2}. Cette analyse utilise les données enregistrées avec le détecteur H1 en 1995, correspondant à une luminosité intégrée de 619.9 nb^{-1}.

Notre étude repose pour une large part sur l'identification du candidat électron diffusé dans le calorimètre arrière SPACAL, le trajectographe arrière (la BDC) étant essentielle pour mener à bien cette identification et réaliser une mesure angulaire précise.

En particulier, dans l'intervalle 1.5 GeV $^2 \leq Q^2 \leq 6.5$ GeV ^{2} à bas x ($x \leq 0.01$), les incertitudes expérimentales ont été réduites d'environ un facteur 2 par rapport aux mesures antérieures. Cette amélioration a pu être obtenue grâce à une bonne compréhension des nouveaux détecteurs : le SPACAL et la BDC, ce qui nous a permis de bien contrôler les incertitudes systématiques :

- *Echelle d'énergie électromagnétique (EM) dans SPACAL*: nous avons montré que l'échelle absolue d'énergie EM est déterminée par notre procédure de calibration à 0.6% près pour les électrons du pic cinématique, et à 2.5% près pour les électrons de basse énergie ($E_e = 8$ GeV).
  L'erreur sur la mesure de F_2 est ensuite estimée en augmentant puis en diminuant globalement l'échelle d'énergie EM du candidat électron diffusé dans SPACAL, en supposant que cette dernière suit une relation linéaire entre 2.5% à 8 GeV et 0.6% à 27 GeV .

- *Echelle d'énergie hadronique (HAD)*: nous avons montré que l'échelle globale d'énergie hadronique mesurée dans SPACAL est connue à 7% près. Nous avons également déduit que, pour le calorimètre à Argon Liquide, elle est de 4%, et pour le système de mesure des traces, elle est de 3%.

- *Mesure de l'angle polaire du candidat électron*: nous avons montré que la précision de la mesure de θ_e à l'aide de la trace BDC associée au candidat électron dans SPACAL est de 0.5 *mrad*.

- *Efficacités des coupures de sélection*: nous avons montré que :

Coupure	$\delta_{eff_i}(\%)$
Vertex	1 %
BDC	1 %
R_E	2 %

- *Normalisation du bruit de fond de photoproduction*: nous avons montré qu'une étude fondée sur la mesure des principales observables des événements étiquetés permet de déduire l'incertitude sur la soustraction du nombre d'événements γp (évalué avec le MC PHOJET) à notre échantillon d'événements de DIP.
  De cette analyse, nous avons déduit que l'accord entre les données (événements étiquetés) et le MC γp est correct, les fluctuations maximales étant de l'ordre de 30% ; l'incertitude sur la soustraction des événements γp est donc de 30%.

- *Correction radiative*: nous avons vu que le terme de correction radiative (noté δ_r) est dominé par les processus d'émission de photons réels par l'électron incident ou diffusé :

$$\frac{1}{1+\delta_r} = \frac{nombre\ d'\acute{e}v\acute{e}nements\ DIP\ g\acute{e}n\acute{e}r\acute{e}s\ (\ MC\ Born\ )}{nombre\ d'\acute{e}v\acute{e}nements\ DIP\ g\acute{e}n\acute{e}r\acute{e}s\ (\ MC\ Born\ +\ Radiatif\ )} \tag{7.49}$$

  L'erreur théorique sur la détermination du taux de corrections radiatives -émissions QED- est de l'ordre de 2% lorsque les variables cinématiques sont calculées à l'aide de la méthode électron et de 1% lorsqu'elles sont évaluées à l'aide de la méthode sigma.

- *Normalisation globale des mesures expérimentales*: l'incertitude sur la normalisation globale de l'expérience provient de l'erreur sur la mesure de la luminosité intégrée, due essentiellement à la méconnaissance de la correction du rejet des paquets satellites du faisceau de protons. Nous avons montré que cette erreur est de 1.5% pour l'analyse que nous proposons.

La bonne maîtrise de sous-détecteurs performants a ainsi été décisive dans la diminution des incertitudes systématiques.

Nos mesures de précision dans l'intervalle 1.5 GeV $^2 \leq Q^2 \leq 6.5$ GeV ^{2} sont alors bien adaptées, en association avec d'autres mesures à plus bas Q^2, pour étudier la transition entre les régimes non-perturbatif (de type Regge) et le régime perturbatif de la QCD. Nous avons montré, qu'en l'état, il n'existe pas de modèle théorique satisfaisant qui reproduise l'ensemble des données de photoproduction et des données de DIP.

La précision de nos mesures rend également possible une étude plus pertinente du comportement de F_2 à bas x, afin de déterminer la dynamique, DGLAP ou BFKL, qui reproduit le plus fidèlement les données dans ce domaine cinématique. Nous avons montré que les équations DGLAP, équations maîtresses de la QCD perturbative qui resomment les divergences colinéaires, reproduisent remarquablement la croissance de F_2 à bas x. Nous avons alors testé ces équations sur l'ensemble du domaine cinématique par la procédure dite des ajustements QCD et nous avons montré que les prédictions de la QCD perturbative sont en très bon accord avec les données de DIP pour $Q^2 \geq 1$ GeV ^{2} ; nous en avons déduit une détermination précise de la densité de gluons à bas x ($x \leq 0.01$) [14]. Il sagit d'un test essentiel de la QCD perturbative dont les prédictions concernant les distributions partoniques sont d'autant plus fines que la précision des mesures augmentent : notre analyse est ainsi déterminante pour les valeurs de Q^2 plus petites que 6.5 GeV ^{2}.

La fig. 7.25 représente une prospective concernant la précision accessible sur la mesure de la densité de gluons à partir d'une telle procédure, dans l'hypothèse d'une augmentation importante de la luminosité intégrée au sein de l'expérience H1. On note la très bonne précision attendue pour $\mathcal{L} = 1000\ pb^{-1}$; ceci représente une perspective très importante pour les analyses que nous avons décrites dans ce chapitre.

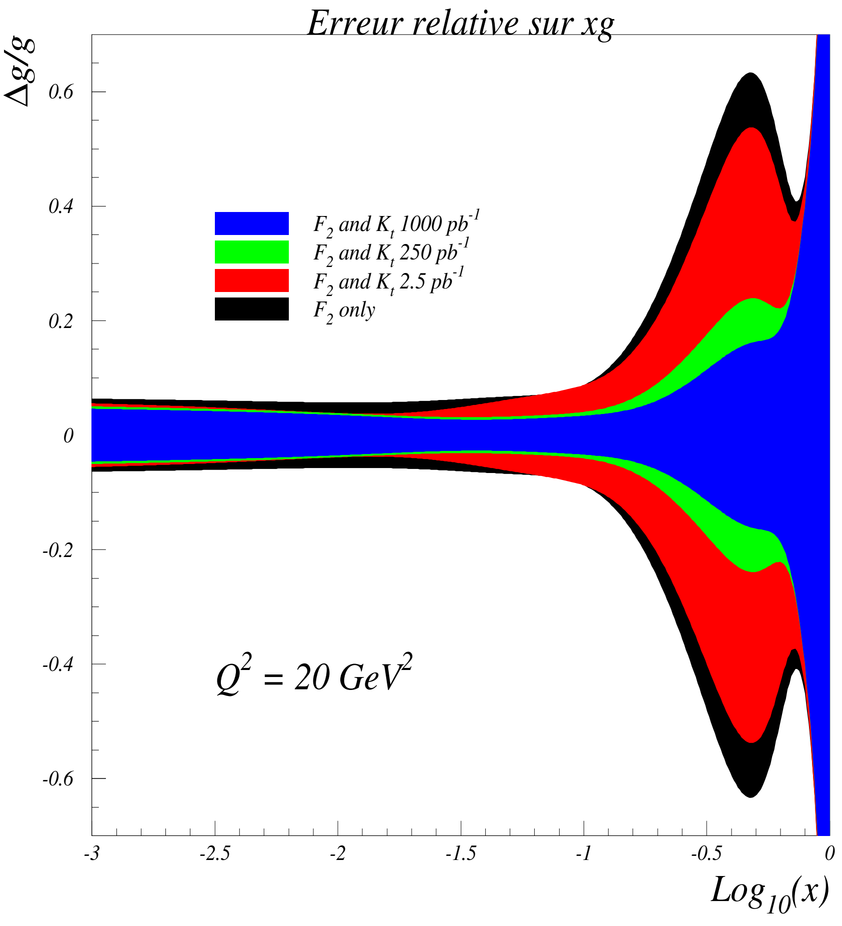


FIG. 7.25 – *Erreur relative sur la densité de gluons déduite par des ajustements QCD (sur F_2 et les taux de jets) en fonction de la luminosité intégrée ; on note la très bonne précision attendue pour $\mathcal{L} = 1000\ pb^{-1}$.*

APPENDICE

Dans cet appendice, nous développons le calcul d'erreur sur l'acceptance dans le cas général d'un MC pondéré, nous présentons également les formules qui s'ensuivent lorsque le MC n'est pas pondéré. La méthode que nous décrivons ci-dessous peut être facilement étendue au traitement de la pureté, de la stabilité et des efficacités [2].

Nous définissons l'acceptance comme suit :

$$A = \frac{N_{rec}}{N_{gen}} = \frac{\sum\limits_n W_n}{\sum\limits_p W_p} = \frac{a}{b}$$

où les nombres d'événements sont évalués pour un domaine cinématique donné. Pour calculer la variance de cette quantité, nous devons dans un premier temps l'exprimer en fonction de variables indépendantes. En particulier, les deux quantités $a = \sum\limits_n W_n = N_{rec}$ et $b = \sum\limits_p W_p = N_{gen}$ ne sont pas des variables indépendantes. Il existe en fait trois groupes d'événements non corrélés, les événements reconstruits et générés dans le même domaine cinématique (N_{reste}), les événements générés en dehors du domaine considéré mais reconstruits dans ce domaine (N_{vient}), et les événements générés dans le domaine considéré mais reconstruits en dehors (N_{part}).

On peut ainsi exprimer N_{rec} et N_{gen} comme suit :

$$N_{rec} = N_{reste} + N_{vient} \qquad N_{gen} = N_{reste} + N_{part}$$

On note :

$$A = \frac{N_{reste} + N_{vient}}{N_{reste} + N_{part}} = \frac{\sum\limits_i W_i + \sum\limits_j W_j}{\sum\limits_i W_i + \sum\limits_k W_k} \tag{7.50}$$

Dans cette expression,

$$\sum_i W_i = N_{reste}, \ \sum_j W_j = N_{vient}, \ \sum_k W_k = N_{part} \tag{7.51}$$

sont des variables indépendantes. On obtient alors :

$$\sigma_A^2 = \sum_i (\frac{\partial A}{\partial W_i})^2 \sigma_{W_i}^2 + \sum_j (\frac{\partial A}{\partial W_j})^2 \sigma_{W_j}^2 + \sum_k (\frac{\partial A}{\partial W_k})^2 \sigma_{W_k}^2$$

où

$$\frac{\partial A}{\partial W_i} = \frac{b-a}{b^2} \qquad \frac{\partial A}{\partial W_j} = \frac{1}{b} \qquad \frac{\partial A}{\partial W_k} = \frac{-a}{b^2}$$

- Dans le cas d'un MC pondéré, nous pouvons écrire $\sigma_{W_\xi}^2 = W_\xi^2$ pour $\xi \in [i, j, k]$, la variance de l'acceptance devient ainsi :

$$\sigma_A^2 = (\frac{b-a}{b^2})^2 \sum_i {W_i}^2 + \frac{1}{b^2} \sum_j {W_j}^2 + (\frac{-a}{b^2})^2 \sum_k {W_k}^2 \tag{7.52}$$

- Dans le cas d'un MC non-pondéré, nous avons $W_\xi = 1$ avec $\xi \in [i, j, k]$, alors :

  $$\sigma_A^2 = \frac{(N_{reste} + N_{vient})^2}{{N_{gen}}^3}\left(\frac{N_{gen} - 2N_{reste}}{N_{reste} + N_{vient}} + 1\right) \tag{7.53}$$

  On en déduit en particulier deux inégalités intéressantes :
  si $N_{gen} \leq N_{rec}$, alors

  $$\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 \geq \left(\frac{N_{gen} - N_{rec}}{{N_{rec}}^2}\right) + \frac{2N_{vient}}{{N_{rec}}^2}$$

  si $N_{gen} \geq N_{rec}$, alors

  $$\left(\frac{\sigma_A}{A}\right)^2 \geq \frac{2N_{vient}}{{N_{gen}}^2}$$

  Ces relations déterminent l'erreur relative minimale que l'on attend sur l'acceptance lorsque l'on connaît le taux de migration.

Bibliographie

[1] B. Gonzalez Piñeiro, *Thèse de doctorat* (1996).

[2] B. Laforge, L. Schoeffel, *Nucl. Inst. Meth.* **A394** (1997) 115 ; *Note H1 H1-08/97-528* (1997) ; *Note H1 H1-01/97-511* (1997).

[3] H1 Collaboration, S. Aid et al., *Nucl. Phys.* **B470** (1996) 3.

[4] M. Glück, E. Reya, A. Vogt, *Zeit. Phys.* **C 67** (1995) 433.

[5] A. Donnachie et P.V. Landshoff, *Zeit. Phys.* **C 61** (1994) 139.

[6] B. Badelek, J. Kwiecinski, *Phys. Lett.* **B 295** (1992) 263.

[7] H1 Collaboration, *DESY-97-024* (1997).

[8] ZEUS Collaboration, J. Breitweg et al., *DESY/97-135* (1997).

[9] NMC Collaboration, M. Arneodo et al., *Phys. Lett.* **B364** (1995) 107.

[10] E-665 FNAL Collaboration, M.R. Adams et al., *FNAL-Pub-95/396-E* (1996).

[11] H1 Collaboration, T. Aid et al., *Zeit. Phys.* **C 69** (1995) 27.

[12] ZEUS Collaboration, M. Derrick et al., *Zeit. Phys.* **C 63** (1994) 408.

[13] BCDMS Collaboration, A.C. Benvenuti et al., *Phys. Lett.* **B223** (1989) 485.

[14] H1 Collaboration, *Papier contribué, Jérusalem* (1997).

Conclusions et perspectives

Niels Bohr définissait ainsi le but de la science : *étendre le champ des investigations expérimentales et les réduire à l'ordre.* C'est ainsi que nous avons procédé dans notre travail de thèse ; extension du champ expérimental avec une nouvelle mesure de F_2 de grande précision, et rationalisation des connaissances en situant cette mesure par rapport à l'ensemble des données mondiales pertinentes pour l'étude des interactions fortes, ainsi qu'en définissant de nouveaux concepts phénoménologiques adaptés à une étude globale de la QCD perturbative.

Conclusions :

Nous avons présenté une mesure de la fonction de structure du proton $F_2(x, Q^2)$ pour des valeurs de Q^2 comprises entre 0.85 GeV ^{2} et 25 GeV ^{2}. Cette analyse utilise les données enregistrées avec le détecteur H1 en 1995 correspondant à une luminosité intégrée de 619.9 nb^{-1}. De plus, notre étude repose, pour une large part, sur l'identification d'un candidat électron diffusé dans le calorimètre arrière SPACAL, une bonne compréhension du trajectographe arrière (la BDC) étant essentielle pour mener à bien cette identification et réaliser une mesure angulaire précise. En particulier, nous avons montré que, dans l'intervalle 1.5 GeV $^2 \leq Q^2 \leq$ 6.5 GeV ^{2} à bas x ($x \leq 0.01$), les incertitudes expérimentales ont été réduites d'environ un facteur 2 par rapport aux mesures antérieures. Ces résultats ont pu être obtenus grâce à des sous-détecteurs technologiquement performants (SPACAL,BDC), que nous avons utilisés au mieux comme le démontre l'étude des incertitudes systématiques ; celles-ci traduisent en effet, de manière quantitative, la maîtrise que l'on a de la réponse des sous-détecteurs. Nous avons explicité les différentes sources que nous rappelons ci-dessous :

- *Echelle d'énergie électromagnétique (EM) dans SPACAL*: nous avons montré que l'échelle absolue d'énergie EM est déterminée par notre procédure de calibration à 0.6% près pour les électrons du pic cinématique, et à 2.5% près pour les électrons de basse énergie (E_e = 8 GeV), une interpolation linéaire étant effectuée entre ces deux valeurs.

- *Echelle d'énergie hadronique (HAD)*: nous avons montré que l'échelle globale d'énergie hadronique mesurée dans SPACAL est connue à 7% près. Nous avons également déduit que, pour le calorimètre à Argon Liquide, elle est de 4%, et pour le système de mesure des traces, elle est de 3%.

- *Mesure de l'angle polaire du candidat électron*: nous avons montré que la précision de la mesure de θ_e à l'aide de la trace BDC associée au candidat électron dans SPACAL est de 0.5 *mrad*.

- *Efficacités des coupures de sélection*: nous avons montré que:

Coupure	$\delta_{eff_i}(\%)$
Vertex	1 %
BDC	1 %
R_E	2 %

- *Normalisation du bruit de fond de photoproduction*: nous avons montré que l'incertitude sur la soustraction des événements γp est de l'ordre de 30%.
- *Correction radiative*: nous avons vu que le terme de correction radiative (noté δ_r) est dominé par les processus d'émission de photons réels par l'électron incident ou diffusé; l'erreur théorique sur la détermination du taux de corrections radiatives est de l'ordre de 2% lorsque les variables cinématiques sont calculées à l'aide de la méthode électron et de 1% lorsqu'elles sont évaluées à l'aide de la méthode sigma.
- *Normalisation globale des mesures expérimentales*: l'incertitude sur la normalisation globale de l'expérience provient de l'erreur sur la mesure de la luminosité intégrée. Nous avons montré que cette erreur est de 1.5% pour l'analyse que nous proposons.

Nos mesures de précision dans l'intervalle 1.5 GeV $^2 \leq Q^2 \leq$ 6.5 GeV ^{2}, analysées conjointement avec d'autres mesures incluant des données de photoproduction, permettent ensuite des comparaisons quantitatives intéressantes avec différentes prédictions théoriques. Nous avons montré, qu'en l'état, il n'existe pas de modèle théorique satisfaisant qui reproduise l'ensemble des données de photoproduction et des données de DIP, la transition entre les régimes non-perturbatif (de type Regge) et perturbatif de la QCD n'est donc pas comprise théoriquement.

La précision de nos mesures à petits x permet également une étude complète du comportement de F_2 dans ce domaine cinématique. La description de F_2 à bas x relève en effet de deux approches théoriques distinctes: DGLAP ou BFKL. Nous avons présenté une analyse phénoménologique pour tenter de discriminer ces deux prédictions et pour inférer de la sorte l'image physique la plus pertinente pour décrire les données à bas x. Nous avons ainsi défini une fonction $\lambda(Q^2)$:

$$\lambda(Q^2) = \left\langle \frac{\partial \ln F_2}{\partial \ln \frac{1}{x}} \right\rangle_{x \leq 0.1} (Q^2) \tag{7.54}$$

qui permet de quantifier la montée de $F_2(x, Q^2)$ à petits x. Nous avons montré que les calculs de λ pour les équations d'évolution DGLAP et BFKL sont bien distincts, par exemple, l'approche DGLAP implique la propriété de concavité suivante:

$$\frac{\partial^2}{\left(\partial \ln Q^2\right)^2} \lambda^{DGLAP}(Q^2) < 0 \tag{7.55}$$

alors que l'approche BFKL impose l'inverse :

$$\frac{\partial^2}{(\partial \ln Q^2)^2} \lambda^{BFKL}(Q^2) > 0 \tag{7.56}$$

De plus, nous avons montré que la limite asymptotique à bas x des équations DGLAP présente une propriété d'universalité très intéressante pour les comparaisons expérimentales.

Nous avons montré alors que notre analyse expérimentale indique que la limite asymptotique à bas x de la dynamique DGLAP reproduit bien les valeurs de λ déduites de nos mesures, en particulier pour 1.5 GeV $^2 < Q^2 <$ 6.5 GeV ^{2} : le comportement de F_2 à bas x est donc compatible avec ce régime d'évolution de la QCD perturbative.

Nous avons ensuite présenté une analyse plus générale des équations d'évolution DGLAP, en proposant un programme d'ajustements QCD NLL(Q^2). Nous avons discuté précisément l'ensemble des hypothèses et des implications de la procédure d'ajustements QCD. Par exemple, en ce qui concerne les formes analytiques des distributions partoniques initiales, le traitement des saveurs lourdes ou la détermination de la densité de gluons. Notre analyse expérimentale nous a montré que les prédictions de la QCD perturbative sont en très bon accord avec les données de DIP pour $Q^2 \geq 1$ GeV ^{2} ; nous avons donc pu étudier la structure partonique du proton avec une grande précision, les mesures que nous avons effectuées permettant en particulier une détermination précise de la densité de gluons dans le domaine des bas x ($x \leq 0.01$) par la procédure d'ajustements QCD.

Nous avons montré que la détermination précise de $\alpha_S(M_Z^2)$, à partir de la réalisation d'ajustements QCD, est un enjeu majeur de la physique hadronique ; les arguments que nous avons développés montrent que cette détermination s'inscrit naturellement dans une perspective globale où un large ensemble de données de diffusion inélastique profonde et autres (collisions hadron-hadron par exemple) est utilisé.

Perspectives :

Pour l'activité expérimentale dans H1, la perspective d'une augmentation importante de la luminosité fournie par le collisionneur HERA permettrait de réaliser une mesure précise de F_2 jusqu'à des valeurs de $Q^2 \simeq M_Z^2$. Ceci devrait permettre par la suite des comparaisons très fines avec les prédictions théoriques qui décrivent les violations de l'invariance d'échelle, en particulier les ajustements QCD.

La détermination actuelle de la densité de gluons par les expériences de diffusion inélastique profonde est bien reproduite par différentes paramétrisations (voir fig. 7.26). Cependant, on observe que, pour $x \geq 10^{-2}$, il est important d'affiner les mesures ; une augmentation de la luminosité dans l'expérience H1 devrait permettre d'atteindre des mesures précises, en particulier pour les valeurs de $x \geq 10^{-2}$.

Nous avons montré également qu'il est intéressant de considérer, au sein de l'analyse globale, des expériences qui sont plus sensibles à la distribution de gluons que ne peuvent l'être les expériences de diffusion profondément inélastique : par exemple, la section efficace de production de jets dans les collisions hadron-hadron est proportionnelle à $\alpha_S^2(Q^2)xg(x,Q^2)x'g(x',Q^2)$ et $\alpha_S^2(Q^2)xg(x,Q^2)x'q(x',Q^2)$ pour les pro-

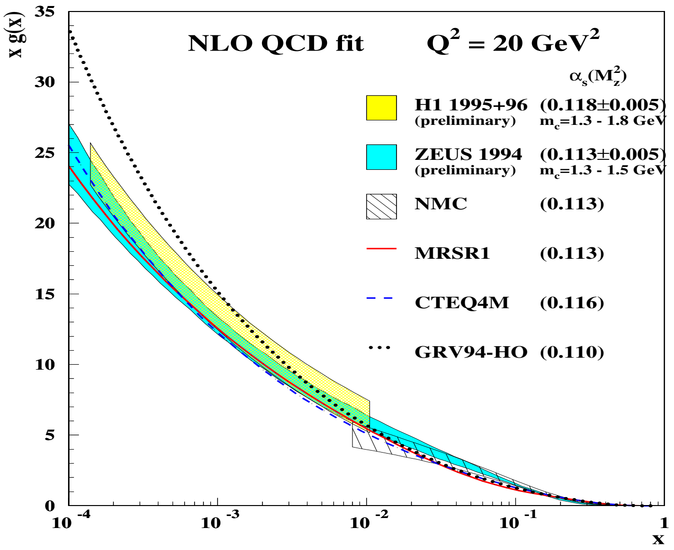


FIG. 7.26 – *Densité de gluons (Q^2 = 20 GeV ^{2}) comparée aux paramétrisations MRS, GRV, CTEQ.*

cessus de collisions gluon-gluon et gluon-quark respectivement. Ces données sont bien adaptées pour contraindre la distribution xg ; la production de photons directs ($g+q \to \gamma+q$, $q+\bar{q} \to \gamma+g$) est également un processus intéressant pour contraindre xg, en particulier à grands x.

Une détermination précise de $\alpha_S(M_Z^2)$ est également un enjeu majeur pour l'étude des interactions fortes, d'autant que l'erreur sur $\alpha_S(M_Z^2)$ affecte directement l'incertitude sur la densité de gluons ; la mesure de $\alpha_S(M_Z^2)$ peut être réalisée à partir des pentes logarithmiques ($Q^2 \frac{\partial \log F_2(x,Q^2)}{\partial Q^2}$) en considèrant les données de diffusion inélastique profonde à grands x.

Dans ce cadre, nous avons indiqué une prospective très intéressante réalisée au sein de la collaboration H1, dans l'hypothèse d'une augmentation importante de la luminosité.

Il est estimé que, si les deux ensembles de données suivants sont acquis :

- un ensemble de données correspondant à une luminosité de $\mathcal{L} \simeq 300$ pb^{-1} pour une énergie dans le centre de masse de $s = 300$ GeV ;
- un ensemble de données correspondant à une luminosité de $\mathcal{L} \simeq 30$ pb^{-1} pour une énergie dans le centre de masse de $s < 300$ GeV , afin de permettre des mesures de F_2 à plus grands x et d'assurer une bonne correspondance avec les mesures des expériences sur cible fixe.

et si, de plus, les incertitudes systématiques sont bien contrôlées, alors un ajustement QCD combinant les nouvelles données de H1 avec celles de SLAC et BCDMS devrait permettre de déterminer $\alpha_S(M_Z^2)$ avec une erreur expérimentale totale de 0.001, soit :

$$\delta_{(expe)}\alpha_S(M_Z^2) \simeq 0.001$$

D'autre part, nous avons montré qu'il est important de situer cette mesure au sein d'une analyse globale, incluant un large ensemble de données expérimentales, en particulier les données issues des collisions hadron-hadron. La fig. 7.27 montre par exemple que les données de CDF ou D0 semblent privilégier une valeur de $\alpha_S(M_Z^2)$ proche de 0.120, alors que les données de diffusion inélastique profonde seules donnent $\alpha_S(M_Z^2) = 0.113 \pm 0.005$, la valeur moyenne mondiale étant de $\alpha_S(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.004$.

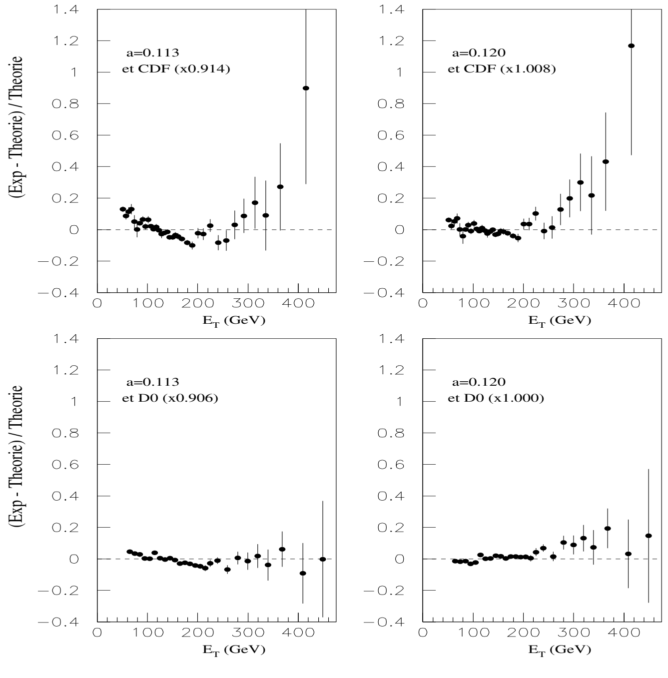


FIG. 7.27 – *Les données de CDF et D0 sont comparées aux prédictions théoriques évaluées pour* $a = 0.113$ *et* $a = 0.120$ *(*$a = \alpha_S(M_Z^2)$*).*

Enfin, la connaissance des distributions partoniques que donne la procédure d'ajustements QCD est essentielle pour calculer les sections efficaces de production des collisionneurs hadron-hadron. Par exemple, pour l'étude des phénomènes de masse caractéristique M, les distributions de partons doivent être évaluées à $Q^2 \simeq M^2$ et $x \geq \frac{M^2}{s}$. En particulier, il est intéressant d'étudier les événements tels que $M \geq \mathcal{O}(100)$ GeV , soit pour le LHC : $x \geq \mathcal{O}(10^{-2})$ et $Q^2 \geq \mathcal{O}(10^4)$ GeV ^{2}.

Si la procédure d'ajustements QCD nous montre que les équations DGLAP sont valides à ces valeurs de (x, Q^2), alors nous pouvons en déduire les distributions partoniques ; dans le même temps, des mesures de F_2 pour les grandes valeurs de Q^2 ($Q^2 \geq \mathcal{O}(10^4)$ GeV ^{2}) sont parfaitement réalisables lorsque la luminosité intégrée est importante.

Nous voyons encore sur cet exemple que le traitement que nous envisageons procède complètement de la dialectique du mot de Bohr évoqué plus haut.

Table des figures

Liste des tableaux