QCD-Instanton-induzierte Prozesse in tiefunelastischer $e^{\pm}p$-Streuung

DIPLOMARBEIT

UNIVERSITÄT HAMBURG
FACHBEREICH PHYSIK
MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PHYSIK, MÜNCHEN
WERNER-HEISENBERG-INSTITUT

Johannes Gerigk

Hamburg
November 1998

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Instantonen sind in der theoretischen Physik seit Mitte der 70er Jahre bekannt ([BPST75, tH76a]). Als nichttriviale Lösungen der klassischen Feldgleichungen sind sie fester Bestandteil jeder nichtabelschen Eichtheorie, also im Rahmen des Standardmodells in der starken Wechselwirkung (Quantenchromodynamik, QCD) und in der elektroschwachen Wechselwirkung (Quantenflavourdynamik, QFD) vorhanden. Wie im ersten Kapitel näher erläutert wird, handelt es sich bei den durch Instantonen induzierten Prozessen um störungstheoretisch nicht erlaubte Tunnelübergänge, bei denen die Erhaltung bestimmter fermionischer Quantenzahlen verletzt wird. In der elektroschwachen Theorie sind dies die Baryonen- und die Leptonenzahl und in der QCD die Chiralität.

Der Wirkungsquerschnitt σ dieser Prozesse ist exponentiell unterdrückt:

$$\sigma \;\sim\; \exp(-4\pi/\alpha)$$

([tH76a, tH76b, tH78]). α bezeichnet den Kopplungsparameter der betrachteten Wechselwirkung. Aufgrund des erheblich größeren Kopplungsparamters in der QCD ($\alpha_s \gg \alpha_w$) erfahren Instanton-induzierte Prozesse hier eine wesentlich schwächere Unterdrückung als in der elektroschwachen Wechselwirkung[1]. Die Beobachtung QCD-Instanton-induzierter Prozesse am $e^{\pm}p$-Speicherring HERA liegt damit in experimenteller Reichweite.

Ereignisse der tiefunelastischen Streuung (*deep-inelastic scattering*, DIS) sind dabei von besonderer Bedeutung, da hier die Existenz einer harten Impulsskala zum ersten Mal die konkrete Vorhersage von Ereignisraten ermöglicht ([BB93, RS94, GRS95a, MRS97, RS98a]). Darüber hinaus besitzen Instanton-induzierte Prozesse in tiefunelastischer Streuung einen charakteristischen hadronischen Endzustand, den man zur Trennung von normalen DIS-Ereignissen und damit zur Entdeckung von Instantonen ausnutzen kann ([RS94, GRS95b, RS97, CRS]).

Die Beobachtung dieser Prozesse wäre eine neuartige, nichtstörungstheoretische Manifestation von nichtabelschen Eichtheorien und damit von grundlegender Bedeutung.

Die vorliegende Arbeit gibt einen tieferen Einblick in die komplexe Struktur des hadronischen Endzustandes Instanton-induzierter Ereignisse. Die zugrunde liegende Kinematik, die Verteilungen und Korrelationen einer Vielzahl von Observablen und schließlich

---

[1] α_w bezeichnet den Kopplungsparameter der elektroschwachen Wechselwirkung. Es gilt $\alpha_w = g^2/4\pi = \sqrt{2}M_W^2 G_F/\pi$. Dabei ist M_W die Masse des W-Bosons und G_F die Fermi-Kopplungskonstante.

die Möglichkeit der Trennung von Instanton-induzierten und normalen DIS-Ereignissen werden eingehend studiert.

Die Ergebnisse dieser Arbeit basieren auf der Analyse von Ereignissen, die mit Hilfe von Monte-Carlo-Programmen generiert wurden, *ohne* eine anschließende Detektorsimulation. Es war dies eine grundsätzliche Entscheidung zu Beginn der Arbeit, die der Tatsache Rechnung trägt, daß man sich bei dem Studium Instanton-induzierter Prozesse zur Zeit noch auf Neuland bewegt. So ist dies die erste umfassendere Studie, die sich dieser Fragestellung von experimenteller Seite aus zuwendet.

Am generierten partonischen bzw. hadronischen Endzustand läßt sich die sehr komplexe Struktur und Kinematik Instanton-induzierter Prozesse in reiner Form beobachten und untersuchen, bevor der zusätzliche Einfluß eines Detektors die in vielen Bereichen erst noch zu verstehenden Abhängigkeiten undurchschaubar machen könnte.
Auch die Analyse des Trennungsvermögens Instanton-induzierter und normaler DIS-Ereignisse wird am generierten Endzustand, ohne Detektorsimulation durchgeführt. Die Verteilungen und Korrelationen der betrachteten Observablen lassen sich hier am leichtesten verstehen, und wir erhalten eine erste Abschätzung der Durchführbarkeit einer Suche nach Instanton-induzierten Prozessen im Experiment.

Die Arbeit gliedert sich in vier Kapitel. Das erste Kapitel gibt eine relativ ausführliche Einführung in die Grundlagen der Instanton-Theorie, ausgehend von Instanton-Phänomenen in der Quantenmechanik, bis zu Instanton-induzierten Prozessen in Ereignissen tiefunelastischer Streuung. Wir schließen unsere Betrachtungen ab mit der Angabe des bei HERA zu erwartenden Wirkungsquerschnitts dieser Prozesse. Das zweite Kapitel beschreibt die Fundamente, auf denen diese Arbeit ruht: Die verwendeten Monte-Carlo-Generatoren, die Bezugssysteme, in denen die Analyse durchgeführt wird, und die allgemeinen kinematischen Schnitte, die bei der Auswahl der Ereignisse angewendet werden.
Mit dem dritten Kapitel beginnt der eigentliche Analyseteil. Wir untersuchen die Möglichkeit, die den Instanton-Subprozeß bestimmenden kinematischen Variablen zu rekonstruieren. Dabei lernen wir zusätzlich eine Reihe wichtiger kinematischer Abhängigkeiten der Signatur Instanton-induzierter Prozesse kennen. Das vierte und umfangreichste Kapitel untersucht und quantifiziert anschließend die Möglichkeiten der Trennung Instanton-induzierter Prozesse von normalen DIS-Ereignissen. Wir studieren die Verteilungen und Korrelationen einer großen Anzahl von Observablen und erhalten so Aufschluß über die für eine Trennung der Ereignisklassen am besten geeigneten Schnitte. Abschließend geben wir eine kurze Zusammenfassung der Analyseergebnisse.

Innerhalb der gesamten Arbeit wird das sogenannte *natürliche* Einheitensystem ($\hbar = 1, c = 1$) verwendet.

Kapitel 1

Theoretische Grundlagen

1.1 Was sind Instantonen?

Wenn man ein physikalisches System innerhalb der Quantenmechanik (oder der Quantenfeldtheorie) analysiert, so findet man Prozesse, die im Rahmen der klassischen Physik unmöglich sind. Beispielsweise kann sich ein Teilchen bei einem quantenmechanischen Tunnelvorgang durch einen klassisch verbotenen Bereich bewegen, entsprechend negativer kinetischer Energie des Teilchens. Obwohl es sich dabei um ein rein quantenmechanisches Phänomen handelt, können auch die klassischen Gleichungen diese Prozesse als Lösungen enthalten, wenn man in ihnen die Zeit t durch die imaginäre Zeit τ ersetzt ($t \to -i\tau$)[1]. Mit anderen Worten: Manche Vorgänge, die in der klassischen Physik in reeller Zeit verboten sind, sind in der imaginären Zeit erlaubt. Entscheidend für die physikalische Relevanz solcher Lösungen ist natürlich, daß man sie in die Minkowski-Metrik (also in die reelle Zeit) analytisch fortsetzen kann.
Instantonen sind nun gerade solche Lösungen klassischer Feldgleichungen, die den erwähnten nichtklassischen Prozeß, nämlich das Tunneln durch eine Energiebarriere, beschreiben. Genauer gesagt, bezeichnet der Begriff nur die Tunnellösungen mit Gesamtenergie $E = 0$ (sog. Vakuumlösungen), bei denen die Wirkung minimal wird. Obwohl der Begriff "Instanton" in der Analyse nichtabelscher Eichtheorien geprägt wurde (vgl. [BPST75] - hier als "Pseudoteilchen" bezeichnet - und [tH76a]), ist es sehr instruktiv, sich zunächst einmal Instantonprozesse in der Quantenmechanik anzuschauen. Viele der hier gefundenen Ergebnisse lassen sich direkt auf Instantonen in nichtabelschen Eichtheorien übertragen, wo die Rechnungen selbst jedoch äußerst kompliziert sind.
Die folgenden Darstellungen sind angelehnt an die Ausführungen in [VZNS82], [SS98] und [Sch98a].

1.1.1 Instantonen in der Quantenmechanik

Betrachten wir als Beispiel für die Möglichkeit eines Tunnelprozesses in der Quantenmechanik die Bewegung eines spinlosen Teilchens der Masse $m = 1$ in einem Doppelmulden-

---

[1] Mathematisch entspricht dies einer analytischen Fortsetzung der Minkowski-Metrik in die euklidische Metrik. Man bezeichnet diesen Vorgang auch als *Wick-Drehung*.

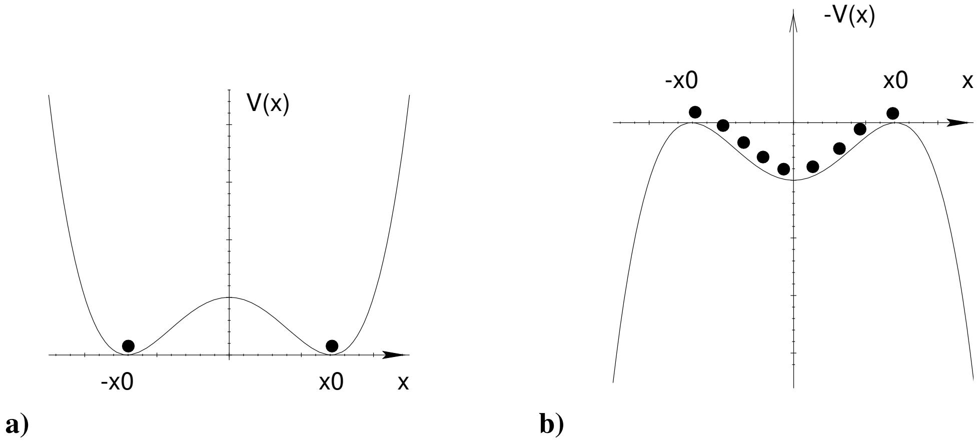


Abb. 1.1: **a)** Das Doppelmulden-Potential $V(x)$. Die Punkte repräsentieren die klassischen Grundzustände eines Teilchens in diesem Potential. **b)** Dasselbe Potential, wenn man die Analyse im euklidischen Raum (imaginäre Zeit) durchführt. Es entsteht ein Doppel*hügel*-Potential $-V(x)$. Angedeutet ist der in diesem Potential (auch) klassisch erlaubte Weg zwischen $-x_0$ und x_0. (Abb. aus [Sch98a].)

Potential der Form

$$V(x) = g(x^2 - x_0^2)^2 \tag{1.1}$$

(siehe Abb.1.1 a; die Konstanten g und x_0 bestimmen die Höhe und Breite des Potentialberges).

Die Gesamtenergie E des Teilchens und die Lagrangefunktion L ergeben sich damit zu

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) \tag{1.2}$$

und

$$L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x). \tag{1.3}$$

Klassisch erlaubte Lösungen der entsprechenden Bewegungsgleichungen gibt es nur, wenn für die kinetische Energie des Teilchens gilt: $E_{kin} = E - V \geq 0$. Für $E = 0$ gibt es wegen der Potentialschwelle $V > 0$ keine erlaubte Trajektorie $x(t)$ zwischen $-x_0$ und x_0. Der Grundzustand ist also zweifach entartet: das Teilchen liegt entweder in der linken ($x = -x_0$) oder der rechten ($x = x_0$) Potentialmulde mit der Energie $E = 0$.

Aus der Quantenmechanik wissen wir, daß dies nicht korrekt ist: Tunnelübergänge zwischen $-x_0$ und x_0 vermischen die klassisch getrennten Zustände, so daß sich der wahre Grundzustand als Superposition beider ergibt:

$$|\,Grundzustand\,\rangle \;=:\; |\,x\,\rangle_{E=0} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\;|-x_0\,\rangle + |\,x_0\,\rangle\;). \tag{1.4}$$

Der Erwartungswert für den Grundzustand $\langle x\rangle_{E=0}$ ist also exakt null, die Entartung aufgehoben und die ursprüngliche Symmetrie des Systems (bzgl. einer Ersetzung $x \to -x$)

wiederhergestellt.
Wie einleitend gesagt, läßt sich das Tunneln auch klassisch beschreiben, indem man zur imaginären Zeit τ übergeht, also die Ersetzung $t \to -i\tau$ vornimmt. Dadurch ändert sich in der Gesamtenergie das relative Vorzeichen von E_{kin} und $V(x)$:

$$E = -\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V(x). \tag{1.5}$$

Man kann dies auch als "Drehung" des Potentials $V(x)$ zu $-V(x)$ auffassen:

$$-E = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - V(x), \tag{1.6}$$

woran man sofort die jetzt auftretenden Lösungen für $E = 0$ erkennt (vgl. Abb. 1.1 b). Es ist also folgende Differentialgleichung zu lösen ($E = 0,\ V(x) = g(x^2 - x_0^2)^2$):

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{2g}(x^2 - x_0^2)} = d\tau \tag{1.7}$$

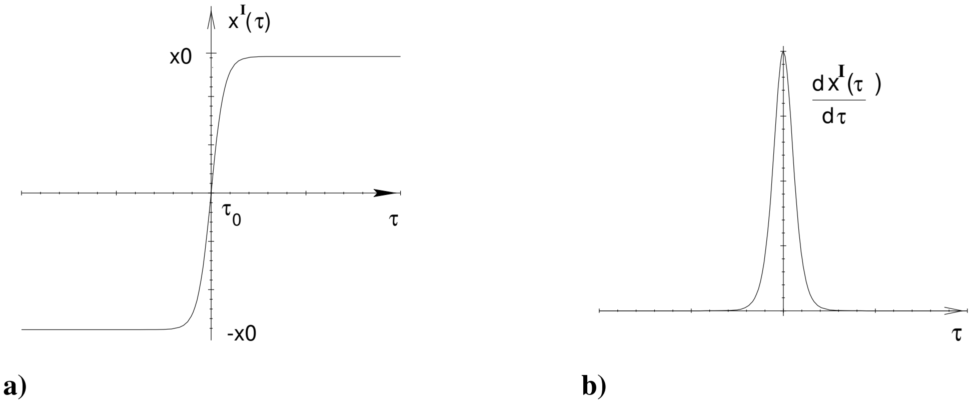
Dies ist (insbesondere mit Hilfe eines guten Nachschlagewerkes, z.B. [BS91]) schnell getan, man erhält die sogenannte Instantonlösung

$$x^{(I)}(\tau) = x_0 \tanh(\sqrt{2g}x_0[\tau - \tau_0]) \tag{1.8}$$

bzw. die Anti-Instantonlösung

$$x^{(\bar{I})}(\tau) = -x_0 \tanh(\sqrt{2g}x_0[\tau - \tau_0]). \tag{1.9}$$

Instantonen vermitteln in diesem Beispiel also Übergänge von $x^{(I)}(\tau = -\infty) = -x_0$ nach $x^{(I)}(\tau = \infty) = x_0$, während Anti-Instantonen den umgekehrten Weg beschreiben (vgl. Abb. 1.2). τ_0 nennt man das Zentrum des Instantons in der (imaginären) Zeit. Dieses



a) **b)**

Abb. 1.2: **a)** Instanton-Lösung der Bewegungsgleichung in imaginärer Zeit. Anti-Instantonen wären dazu punktspiegelsymmetrisch. **b)** "Geschwindigkeit" des Instanton-Prozesses in imaginärer Zeit. (Abb. aus [Sch98a].)

kann als Integrationskonstante beliebig gewählt werden, was die Symmetrie der Lagrangefunktion (1.3) bezüglich der Wahl des (euklidischen) Zeitursprungs widerspiegelt[2]. Der Ursprung des Namens *Instant*on wird nun deutlich: Es handelt sich um eine Lösung, die in der imaginären Zeit lokalisiert ist, in der reellen Zeit geschieht der Tunnelübergang *instantan*.
Um jetzt die Wahrscheinlichkeit für den Instanton-Übergang zwischen den beiden klassichen Grundzuständen (Vakua) auszurechnen, kann man entweder die semiklassische WKB-Näherung verwenden (siehe z.B. [Nol91]), oder aber die Feynmansche Pfadintegralmethode, deren Prinzip wegen ihrer grundlegenden Bedeutung in der Quantenfeldtheorie hier kurz vorgestellt werden soll. Danach ergibt sich die Übergangsamplitude zwischen zwei Zuständen ($x(t_i) = x_i =$ Anfangszustand und $x(t_f) = x_f =$ Endzustand) als Summe über alle Pfade $[Dx]$, gewichtet mit der entsprechenden Wirkung $S(x)$:

$$\langle x_f \mid \exp\left(-iH(t_f - t_i)\right) \mid x_i \rangle = N \int_{x_i}^{x_f} [Dx] \exp\left(iS(x)\right) \tag{1.10}$$

bzw. im Euklidischen:

$$\langle x_f \mid \exp\left(H(\tau_f - \tau_i)\right) \mid x_i \rangle = N \int_{x_i}^{x_f} [Dx] \exp\left(-S_E(x)\right) \tag{1.11}$$

(N ist ein Normierungsfaktor). Die euklidische Wirkung S_E erhält man dabei wieder durch die Ersetzung $t \to -i\tau$. Man definiert:

$$S = \int dt \ L(x, \dot{x}) \ \overset{t \to -i\tau}{\Longrightarrow} \ iS_E. \tag{1.12}$$

In unserem Beispiel finden wir ($E = 0$, $x_i(\tau \to -\infty) = -x_0$; $x_f(\tau \to +\infty) = x_0$): [3]

$$\begin{aligned} S_E &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \ [\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + V(x)] \overset{(1.6)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \ 2\,V(x) \\ &\overset{(1.7)}{=} \int_{-x_0}^{x_0} dx \ \sqrt{2V(x)} = \frac{4}{3}\sqrt{2g}\ x_0^3. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Die Wirkung besitzt einen endlichen Wert, die gefundene Instanton- (1.8) bzw. Anti-Instantonlösung (1.9) ist also eine nichttriviale Lösung von (1.7) mit endlicher Übergangswahrscheinlichkeit.

Gleichung (1.11) macht die Bedeutung der klassischen Tunnellösung (also des Instantons) klar: Das Pfadintegral, und damit die Übergangsamplitude, erhält seinen dominanten Beitrag durch Pfade mit minimaler Wirkung. Diese werden aber gerade durch die klassischen Lösungen der Bewegungsgleichungen beschrieben.

---

[2] Da man τ_0 frei wählen kann, muß zum Auffinden der Tunnelamplitude (Gl. (1.14)) über alle τ_0 integriert werden. Man bezeichnet τ_0 daher auch als *kollektive* Koordinate.

[3] Die über den Gleichheitszeichen der folgenden Rechnungen angegebenen Nummern verweisen auf die in dem jeweiligen Schritt verwendete Formel.

In der Quantenmechanik ist dagegen im Prinzip *jeder* Pfad erlaubt, so daß wir für die vollständige Lösung die Wirkung um ihr klassisches Minimum $S_E^{(I)}$ entwickeln müssen. Man erhält so für die Tunnelamplitude T in der semiklassischen Approximation (vgl. z.B. [SS98]):

$$T \;=\; f(g, x_0) \cdot \exp\left(-S_E^{(I)}\right)\,(1 \;+\; Korrekturen). \tag{1.14}$$

Der Faktor $f(g, x_0)$ vor der Exponentialfunktion und auch die Größe der Korrekturen hängen in komplizierter Weise von den die Form des Potentials $V(x)$ bestimmenden Konstanten g und x_0 ab. Im allgemeinen kann man sagen, daß höhere Korrekturterme umso weniger relevant sind, je höher der Potentialwall ist und je weiter die Minima des Potentials voneinander entfernt sind.

Bevor wir nun zu Instantonen in Yang-Mills-Theorien[4] übergehen, erwähnen wir noch eine wichtige Eigenschaft der Lösungen unseres quantenmechanischen Beispiels, die wir sogleich im nächsten Abschnitt wiederfinden werden. Die Berechnung der Tunnelamplituden mit Hilfe des Feynmanschen Pfadintegrals im Euklidischen (1.11) macht deutlich, daß wir bei der Untersuchung des Spektrums an klassischen Lösungen nur an solchen interessiert sind, die im Limes $\tau \to \pm\infty$ eine *endliche* Wirkung besitzen. Wie man sich an Abb. 1.1b jedoch leicht klar macht, gibt es natürlich auch Pfade mit unendlicher Wirkung (z.B. $x(\tau) \to \infty$ für $\tau \to \infty$), und damit verschwindender Übergangswahrscheinlichkeit. In unserem Beispiel bedeutet die Bedingung einer endlichen Wirkung also, daß die Lösungen $x(\tau)$ für $\tau \to \infty$ die Grenzwerte $\pm x_0$ besitzen müssen. Dies gibt uns die Möglichkeit, diese Wege in 'topologisch' unterscheidbare Klassen einzuteilen, je nachdem welcher Grenzwert erreicht wird. Wir führen zu diesem Zweck eine topologische Ladung Q ein:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\dot{x}(\tau)}{2x_0} \;=\; \frac{x(+\infty) - x(-\infty)}{2x_0} \;=\; \begin{cases} \;\;0 & \text{Grenzwerte } x(\pm\infty) \text{ identisch} \\ \;\;1 & \text{Instanton} \\ -1 & \text{Anti-Instanton} \end{cases} \tag{1.15}$$

Der wichtige Punkt hierbei ist, daß Pfade mit verschiedenem Q nicht durch stetige Deformationen, bei denen die Wirkung endlich bleibt, ineinander überführt werden können. Sie bilden sogenannte *Homotopieklassen* (vgl. z.B. [May72]).

---

[4] Der Begriff "Yang-Mills-Theorie" bezeichnet das gleiche wie der Begriff "nichtabelsche Eichtheorie".

1.1.2 Instantonen in nichtabelschen Eichtheorien

Yang-Mills-Theorien bilden - als Quantenfeldtheorie formuliert - das Grundgerüst des Standardmodells in Form der Quantenchromodynamik (QCD) und der elektroschwachen Wechselwirkung (Quantenflavourdynamik, QFD). Man nimmt an, daß sie eine fundamentale Beschreibung der Elementarteilchen und der zwischen ihnen wirkenden Kräfte darstellen. Ein zentraler Punkt dieser Theorien ist, daß die in ihnen enthaltenen Eichfelder Selbstkopplungen aufweisen: Ihre Eichbosonen (im Standardmodell also die Gluonen bzw. die W^+-, W^-- und Z^0-Bosonen) besitzen im Gegensatz zum elektrisch neutralen Photon der U(1)-Theorie (verallgemeinerte) Ladungen, können also mit sich selbst wechselwirken. Dies hat eine Reihe wichtiger physikalischer Konsequenzen (vgl. z.B. [Ebe89]). Für uns von Bedeutung ist, daß in diesen Theorien das klassische Vakuum eine nichttriviale topologische Struktur aufweist. Um zu verstehen, was damit gemeint ist, betrachten wir das Funktional der statischen Feldenergie[5]

$$E = \frac{1}{g^2} \int d^3x \ \mathrm{Sp}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2). \tag{1.16}$$

$\vec{E}$ ist das (verallgemeinerte) elektrische und $\vec{B}$ das (verallgemeinerte) magnetische Feld, "Sp" bezeichnet die Spur. Das klassische Vakuum entspricht der Feldenergie null und damit verschwindenden Feldstärken. In nichtabelschen Eichtheorien, in denen das Eichfeld das Transformationsverhalten

$$\vec{A}' = U(\vec{x})\vec{A}U^\dagger(\vec{x}) - i\ U(\vec{x})\vec{\nabla}U^\dagger(\vec{x}) \tag{1.17}$$

besitzt ($U(\vec{x})$ ist eine Transformationsmatrix der Eichgruppe), erfordert dies jedoch nicht, daß auch das Eichfeld verschwinden muß, sondern nur, daß sich das Eichfeld aus einer *reinen* Eichung

$$\vec{A}'_{Vak} = -i\ U(\vec{x})\vec{\nabla}U^\dagger(\vec{x}) \tag{1.18}$$

ergibt. Sämtliche reinen Eichfelder $\vec{A}'_{Vak}$ ergeben also die Feldenergie null, das Vakuum. In der Quantenelektrodynamik ($U(1)$-Eichgruppe in $1+3$ Dimensionen) kann man alle reinen Eichungen miteinander identifizieren; die Eichgruppe besitzt eine triviale Topologie und es gibt nur *ein* Vakuum.

Anders in nichtabelschen Eichtheorien. Hier erhält man verschiedene Klassen von reinen Eichungen: Alle Eichtransformationen $U(\vec{x})$, die sich durch kontinuierliche Deformation ineinander überführen lassen, bilden eine Homotopieklasse (entsprechend unserem quantenmechanischen Beispiel). Man ordnet den Klassen und damit auch den entsprechenden Eichfeldern $\vec{A}'_{Vak}$ als Kennzeichnung eine ganzzahlige topologische Windungszahl, die sogenannte Chern-Simons-Zahl N_{CS}, zu, die einfach zählt, wie oft die Eichmannigfaltigkeit $\{U(\vec{x})\}$ bei der Abbildung $\vec{x} \to U(\vec{x})$ überdeckt wird, wenn $\vec{x}$ einmal seinen Wertebereich durchläuft[6].

---

[5] Wir benutzen hier die sogenannte temporäre Eichung $A_0 = 0$ (Zeitkomponente des Eichfeldes = 0) und die Matrix-Darstellung der Eichfelder (die Generatorenindizes tauchen nicht explizit auf).

[6] Wertvolle Erläuterungen hierzu findet man in [Rol94], Kapitel 16.

Jede Homotopieklasse repräsentiert also ein spezielles Vakuum ausgezeichneter Topologie. Mit anderen Worten: Von einem Vakuum zu einem anderen kann man nicht durch eine topologisch triviale (also kontinuierliche) Eichtransformation gelangen, entlang der die Feldenergie immer null bleibt. Die Vakua sind folglich durch eine Energiebarriere E_B voneinander getrennt ([JR76], vgl. Abb. 1.3)[7]. Da die Chern-Simons-Zahl N_{CS} eine beliebige ganze Zahl sein kann, gibt es eine unendlich große Anzahl verschiedener Vakua, so daß der Grundzustand (ohne Tunnelübergänge) eine unendlichfache Entartung besäße.

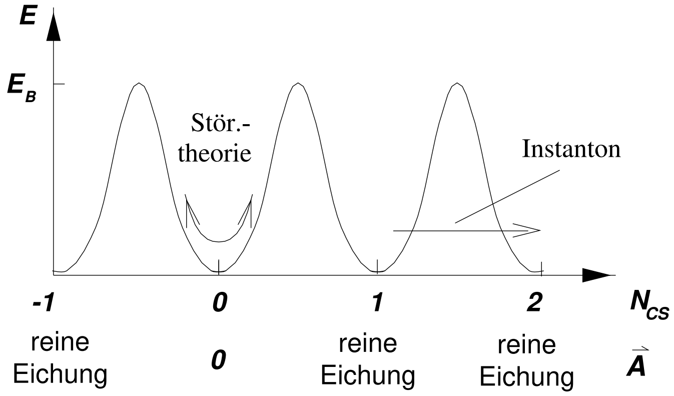


Abb. 1.3: Schematisierte 1-dim. Darstellung der topologisch verschiedenen, durch eine Energiebarriere E_B voneinander getrennten Vakua nichtabelscher Eichtheorien (siehe Text).

Instanton-Lösungen der klassischen (euklidischen) Feldgleichungen repräsentieren also im Falle der Yang-Mills-Theorie *nichttriviale* Eichfelder ($A_\mu^{(I)}, \mu = 1..4$) mit endlicher Wirkung, die topologisch nichtäquivalente Vakua miteinander verbinden. Um diese Lösungen zu finden (deren explizite Form uns hier nicht weiter interessieren soll), geht man wieder in die imaginäre Zeit über ($t \to -i\tau$). Für die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ dieser Eichfelder findet

---

[7] In der elektroschwachen Theorie läßt sich die Höhe der Energiebarriere direkt ausrechnen. Es gibt eine statische Lösung der Feldgleichungen, genannt *Sphaleron*, mit Chern-Simons-Zahl $N_{CS} = 1/2$ (nur bei Vakuumzuständen muß N_{CS} *ganzzahlig* sein), die der Spitze der Barriere entspricht (vgl. [KM84]). Für die Barrierenhöhe findet man:

$$E_B^{QFD} = E_{Sph} \sim \frac{m_w}{\alpha_w} \sim \mathcal{O}(10) \text{ TeV} \tag{1.19}$$

(wobei m_w gleich der W-Boson-Masse und $\alpha_w = g^2/4\pi$ gleich der elektroschwachen Kopplungskonstanten ist). In der QCD kann man über die Instanton-Lösung (für den inklusiven Prozeß) abschätzen:

$$E_B^{QCD} \sim Q'. \tag{1.20}$$

Q' ist eine den sogenannten harten Subprozeß eines QCD-Instantons charakterisierende kinematische Variable (vgl. Abb. 1.6), die, abhängig vom jeweiligen Prozeß, in der Größenordnung einiger GeV liegt. Man muß jedoch beachten, daß es sich bei diesen Energieangaben um eine Abschätzung der minimalen Barrierehöhe für den statischen Fall handelt. Für den dynamischen Prozeß einer Teilchenkollision aber ist man bislang nicht in der Lage, einen Energieschwellenwert anzugeben. Der mögliche Beitrag einer klassischen Barriere*überwindung* ($E_{kin} \geq V$) zum Wirkungsquerschnitt solcher anomaler Prozesse (vgl. Abschnitt 1.1.2.2) ist damit völlig ungeklärt.

man ([BPST75]):

$$\mathcal{L}\left(A_\mu^{(I)}(x,\rho)\right) \;=\; \frac{12}{\pi\alpha}\cdot\frac{\rho^4}{(x^2+\rho^2)^4}\;, \tag{1.21}$$

wobei α die Kopplungsstärke der jeweils betrachteten Wechselwirkung und ρ die sogenannte Instantongröße ist[8]. Wichtig für uns ist die 'sphärische' Symmetrie der Lagrangedichte: $\mathcal{L}$ hängt nur vom (raumzeitlichen) Abstandsquadrat x^2 ab (vgl. Abb. 1.4). Dies hat entscheidenden Einfluß auf die noch zu besprechende Signatur Instanton-induzierter Prozesse in Ereignissen tiefunelastischer Streuung (vgl. Abschnitt 1.2.1).